

Stochastické diferenciálne rovnice

:: Stochastické diferenciálne rovnice ::



Stiahnite si [\[cv3sdr.sce\]](#) - súbor pre Scilab k tomuto cvičeniu.

- Nenáhodná funkcia môže byť zadaná ako riešenie **obyčajnej diferenciálnej rovnice** - máme daný vzťah medzi diferenciálom funkcie a diferenciálom času. Napr. $dx(t)=x(t) dt$, spolu so začiatočnou podmienkou $x(0)$ určuje (deterministickú, t.j. nenáhodnú) funkciu $x(t)$.
- Analógia pre náhodné funkcie - vzťah medzi diferenciálom funkcie, diferenciálom času a diferenciálom Wienerovho procesu dw . Takto dostávame **stochastické diferenciálne rovnice**. Ich riešením je náhodná funkcia. Napríklad:
 - $dx=2dt+3dw$, začiatočná podmienka $x(0)=0$ - toto je Brownov pohyb: $x(t)=2t+3w(t)$
 - $dx=2dt+3dw$, začiatočná podmienka $x(0)=1$ - posunutý Brownov pohyb, začína z jednotky: $x(t)=1+2t+3w(t)$
 - $dx=10[1-x(t)] dt + 0.25 dw(t)$, $x(0)=0.5$ - tiež sa dá zapísať explicitne, ale toto vyjadrenie je komplikovanejšie. Dobrú predstavu o priebehu takéhoto procesu však dostaneme pomocou simulácií jeho trajektórií.
- Pozrime sa teda na proces tvaru

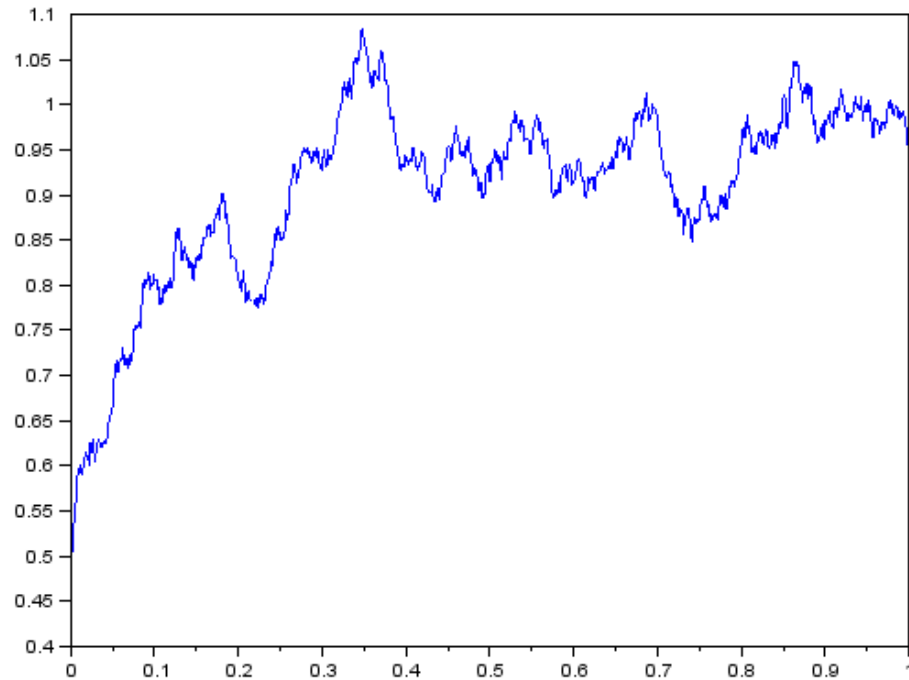
$$dx(t) = \kappa(\theta - x(t))dt + \sigma dw(t)$$

kde κ, θ, σ sú kladné konštanty. Takýto proces sa nazýva **Ornstein-Uhlenbeckov proces**.

Najjednoduchším spôsobom, ako získať aproximáciu riešenia stochastickej diferenciálnej rovnice je nahradiť diferenciály diferenciálmi (analógia Eulerovej metódy pre obyčajné diferenciálne rovnice, pri stochastických diferenciálnych rovniciach sa nazýva **Euler-Marujamova metóda**):

```
5 //-----
6 // ORNSTEIN-UHLENBECKOV PROCES
7 //-----
8
9 kappa=10; theta=1; sigma=0.25; // parametre procesu
10 x0=0.5; // zaciatočna hodnota
11
12 dt=0.001; // casovy krok
13 n=1000; // pocet krokov
14
15 // Euler-Marujamova diskretizacia
16 x(1)=x0;
17 for i=1:n
18     dw=sqrt(dt)*randn();
19     dx=kappa*(theta-x(i))*dt+sigma*dw;
20     x(i+1)=x(i)+dx;
21 end;
22
23 t=0:dt:n*dt; // cas
```

Ukážka:



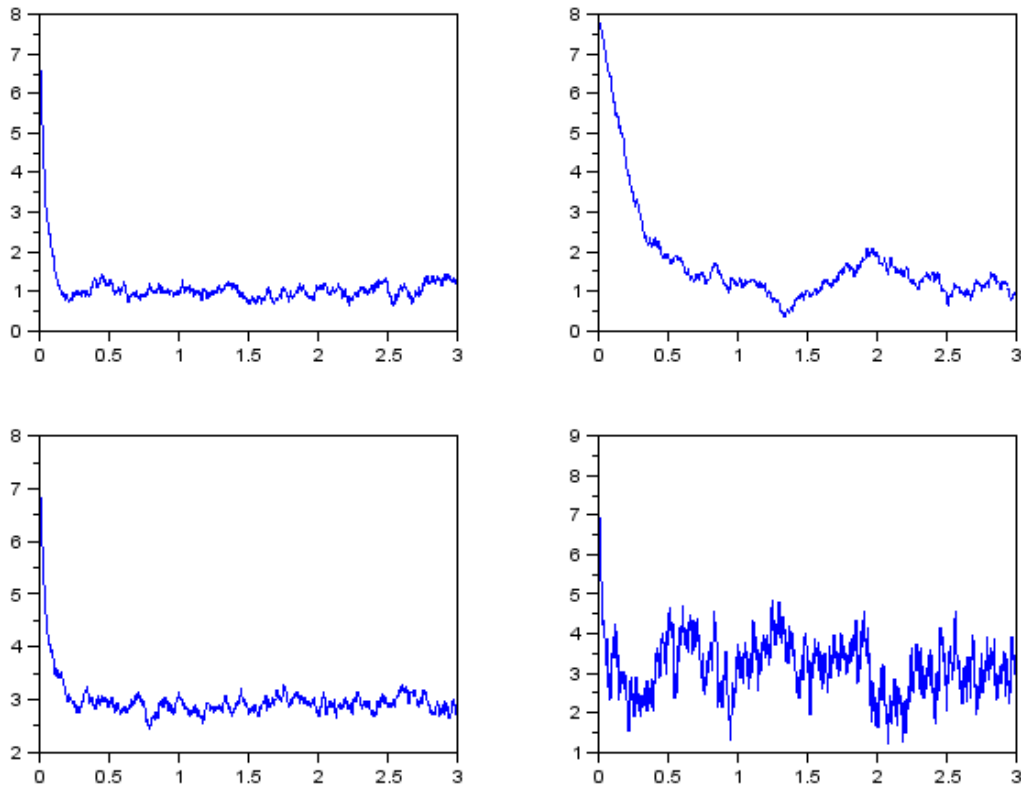
-
- Terminológia: Deterministická časť procesu (pri časovom diferenciáli dt) sa nazýva **drift**, stochastická časť (pri diferenciáli Wienerovho procesu dw) sa nazýva **volatilita**.

:: Cvičenia (1) ::

1. Definujte v Scilabe funkciu, ktorá vygeneruje vektor s realizáciou OU procesu so zadanou začiatočnou hodnotou a zadanými parametrami procesu a časového delenia. Zakreslite niekoľko realizácií Orstein-Uhlenbeckovho procesu so zvolenými parametrami. Všimajte si, ako závisí typický priebeh procesu od parametrov.

Prirad'te nasledujúce hodnoty parametrov k ich trajektóriám:

- $\kappa = 20, \theta = 1, \sigma = 1$
- $\kappa = 3, \theta = 1, \sigma = 1$
- $\kappa = 20, \theta = 3, \sigma = 5$
- $\kappa = 20, \theta = 3, \sigma = 1$



2. Ornstein-Uhlenbeckov proces sa používa napríklad pri modelovaní úrokových mier. **Vašíčkov model** predpokladá, že okamžitá úroková miera (prakticky - pri analýze reálnych dát - úroková miera na krátky čas) sa riadi Ornstein-Uhlenbeckovým procesom.

V článku *Athanasios Episcopos: Further evidence on alternative continuous time models of the short-term interest rate. Journal of International Financial Markets, Institutions and Money 10 (2000) 199-212* autor odhadoval modely úrokových mier. Všeobecný model, ktorým sa zaoberal, je

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$$

Špeciálnou voľbou niektorých parametrov dostávame konkrétne modely, jedným z nich je aj Vašíčkov model. Výsledky pre Nový Zéland (odhady parametrov pre mesačné dáta od apríla 1986 do apríla 1998 sú v nasledujúcej tabuľke:

Table 3 (Continued)

Country	Model ^b	α	β	σ^2	γ
New Zealand	Unrestricted	0.0045 (2.1021)	-0.048 (-2.1597)	0.0034 (1.9698)	0.7815 (7.2141)
	Vasicek	0.0046 (1.8959)	-0.0487 (-2.2584)	0.0001 (8.3736)	0
	CIR SR	0.0041 (2.026)	-0.0447 (-2.2176)	0.0010 (8.5626)	0.5
	BR-SC	0.005 (8.3841)	-0.0536 (-6.9255)	0.0096 (13.5641)	1
	CIR VR	0	0	0.1215 (20.8112)	1.5
	CEV	0	-0.0038 (-0.4781)	0.0030 (2.0131)	0.7567 (7.1676)

Zdroj: (Episcopos, 2000)

- Proces je v inom tvare, ako sme definovali Ornstein-Uhlenbeckov proces. Vyjadrite ho pomocou parametrov κ , θ , σ . K akej hodnote sa dlhodobu približuje úroková miera?
- Vygenerujte priebeh vývoja úrokovej miery na základe odhadnutých parametrov Vašíčkovho modelu. Zakreslite do jedného grafu niekoľko možných priebehov, štartujúcich z rovnakej začiatočnej hodnoty.

:: Itóova lema ::



Kijōši Itō (1915 - 2008), zakladateľ teórie stochastických diferenciálnych rovníc.

- [Životopis na stránke Inamori Foundation](#)
- [Životopis na "The MacTutor History of Mathematics archive"](#)

- Na predchádzajúcom cvičení sme mali predpis procesu (geometrický Brownov pohyb - cena akcie) $x(t)$ zadaný explicitne v tvare $x(t)=\dots$. Na začiatku tohto cvičenia sme pracovali s iným zápisom - pomocou diferenciálov sme definovali Ornstein-Uhlenbeckov proces. Teraz si ukážeme ich vzájomný vzťah.
- Pre nenáhodnú funkciu vieme derivovaním napísať obyčajnú diferenciálnu rovnicu, ktorú spĺňa. Napr. pre $x(t)=t^2$ platí $dx(t)=2t dt$. Naopak, pre zadanú obyčajnú diferenciálnu rovnicu vieme v niektorých prípadoch napísať explicitné riešenie.
- Ako derivovať náhodnú funkciu? Uvažujme funkciu $f = f(t, w)$, kde w je Wienerov proces a počítajme rozvoj:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} (dw)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial w} (dt)(dw) + \dots$$

Tu si treba uvedomiť, že $(dw)^2 \sim dt$, a teda máme:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} (dw)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial w} (dt)(dw) + \dots$$

toto je vlastne $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} dt$

všetky tieto členy majú
 rád vyšší ako dt, dw
 a tie do diferenciálu nepratria

To znamená, že

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} dt$$

- Vo všeobecnosti dostávame takýmto postupom **Itóovu lemu**:

Nech x je proces daný rovnicou

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw$$

a $f(t, x)$ je hladká funkcia. Potom f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

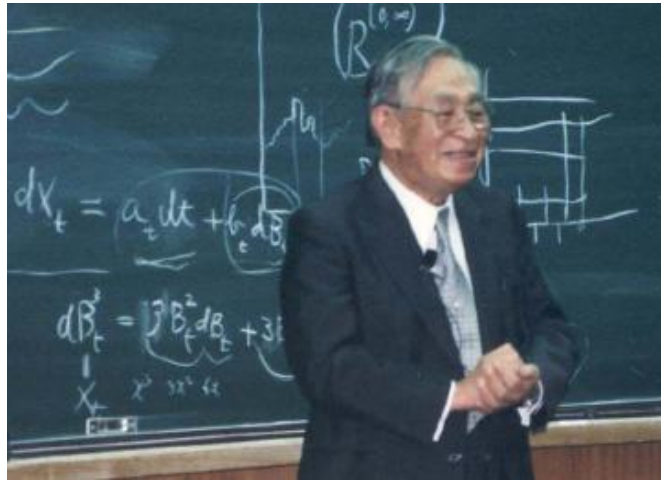
$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw$$

- Ukážky použitia Itóovej lemy pri oceňovaní derivátov:

- Vývoj ceny akcie je daný stochastickou diferenciálnou rovnicou pre S . Cena derivátu V závisí od času t a od ceny akcie S . Itóova lema dáva predpis pre stochastickú diferenciálnu rovnicu, ktorú spĺňa cena derivátu $V(t, S)$. Táto rovnica sa využije pri odvodzovaní ceny derivátu.
- Vývoj okamžitej úrokovej miery r je daný stochastickou diferenciálnou rovnicou (napríklad Ornstein-Uhlenbeckov proces vo Vašíčkovom modeli). Cena derivátu V závisí od času t a od okamžitej úrokovej miery r . Ďalej je postup analogický: Itóova lema dáva predpis pre stochastickú diferenciálnu rovnicu, ktorú spĺňa cena derivátu $V(t, r)$. Táto rovnica sa využije pri odvodzovaní ceny derivátu.

:: Cvičenia (2) ::

1. Príklad z prednášky: Dovočítajte diferenciál $d(B^3)$ z výpočtu z obrázku, kde B je Wienerov proces.

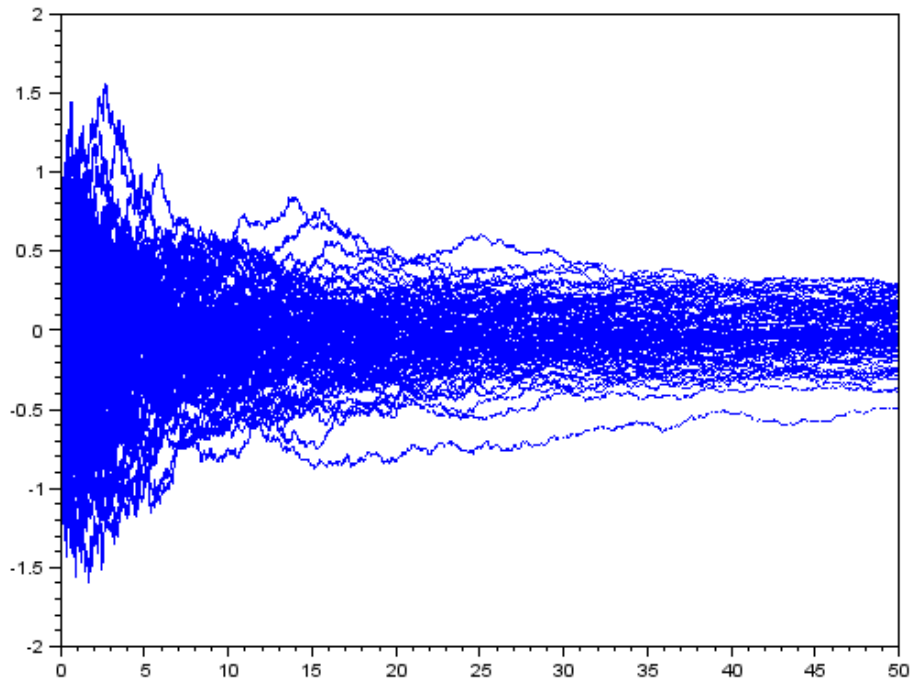


2. Vovočítajte diferenciály nasledovných funkcií:
 - $x_1(t) = \ln y(t)$, kde $dy(t) = 2y(t) dt + 3y(t) dw(t)$,
 - $x_2(t) = -2\exp(-10t + 2w(t))$.

3. Uvažujme proces

$$X(t) = \frac{w(t)}{1+t}$$

Na obrázku je niekoľko realizácií tohto procesu.



Dokážte, že tento proces vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dX(t) = -\frac{1}{1+t}X(t)dt + \frac{1}{1+t}dw(t)$$

4. Porovnanie priebehu procesu a Euler-Marujamovej diskretizácie

Uvažujme proces z predchádzajúceho cvičenia

$$X(t) = \frac{w(t)}{1+t}$$

a stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dX(t) = -\frac{1}{1+t}X(t)dt + \frac{1}{1+t}dw(t)$$

ktorú spĺňa.

Pomocou toho istého Wienerovho procesu vygenerujte trajektóriu tohto procesu a Euler-Marujamovej diskretizácie stochastickej diferenciálnej rovnice. Doplňte chýbajúce časti kódu podľa uvedenej osnovy:

```
T=5;           // casovy interval [0,T]
dt=0.001;     // casovy krok

// vektor casov

t=...

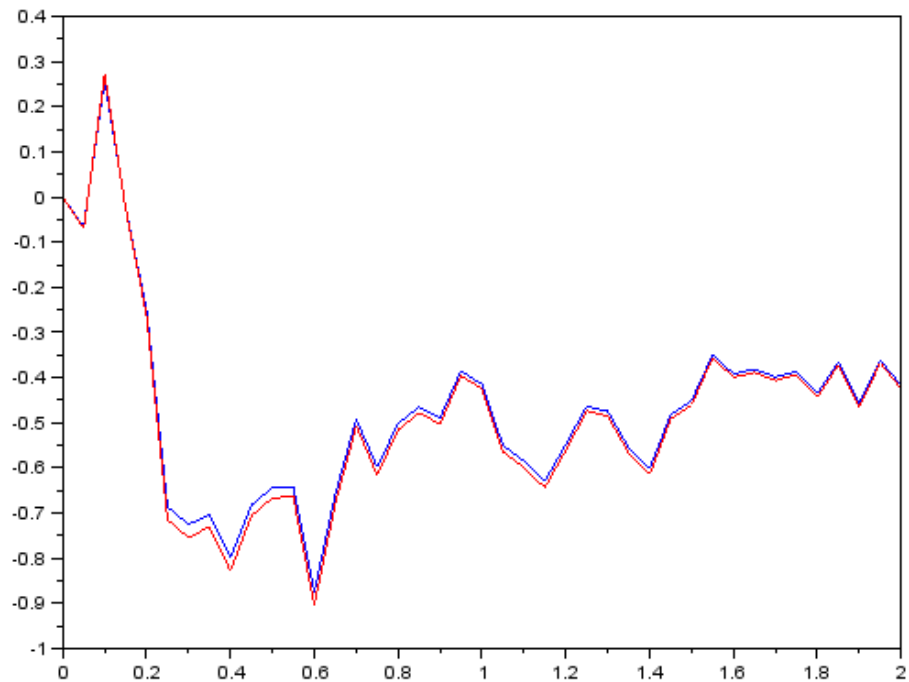
// SPOLOCNY Wienerov proces w
w=...

// x = proces
x=...
```

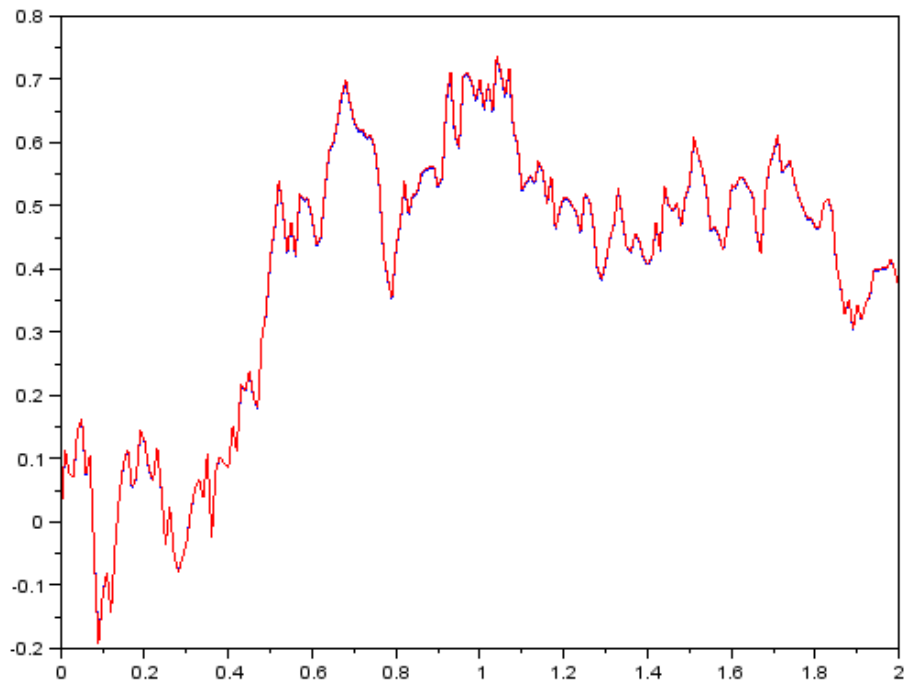
```
// xD = diskretizacia SDR
xD(1)=..
for ...
    xD(i+1)=...
end;

plot(t,x);
plot(t,xD,'r');
```

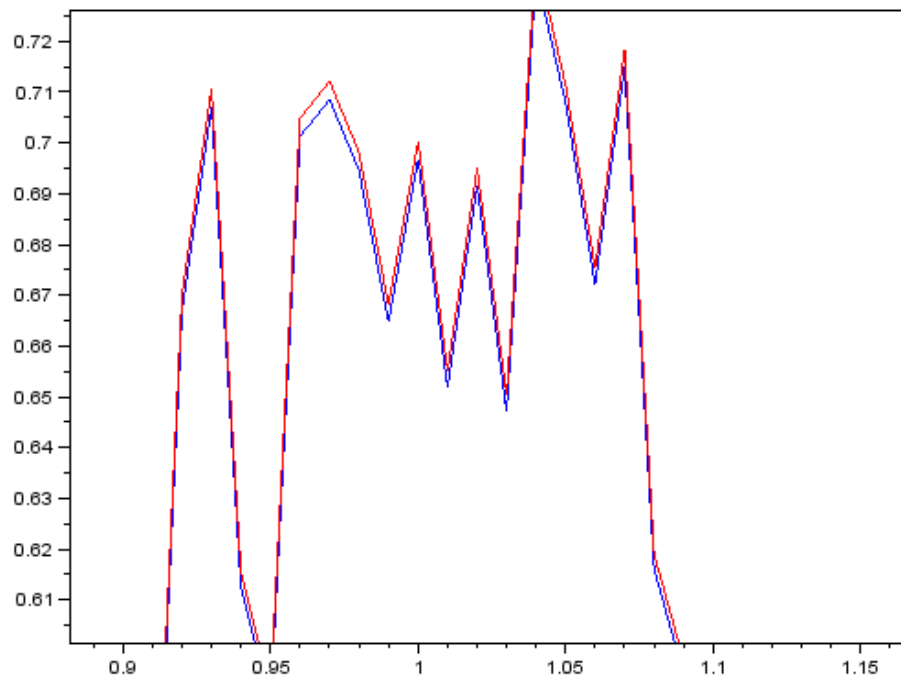
Ukážka pre časový krok $dt=0.05$:



Ukážka pre časový krok $dt=0.01$



Zoom z predchádzajúceho grafu:



:: Ďalšie príklady na precvičenie ::

1. Uvažujme stochastickú diferenciálnu rovnicu

$$dx(t) = \frac{1}{3}x(t)^{1/3}dt + x(t)^{2/3}dw(t), \quad x(0) = x_0$$

- Ukážte, že funkcia

$$x(t) = \left(x_0^{1/3} + \frac{1}{3}w(t) \right)^3$$

je jej riešením.

- Nájďte ďalšie riešenie tejto rovnice v prípade, že $x(0)=0$.

2. Ukážte, že proces $x(t) = \sin(a + w(t))$ kde $a \in (-\pi/2, \pi/2)$ je daná konštanta, vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

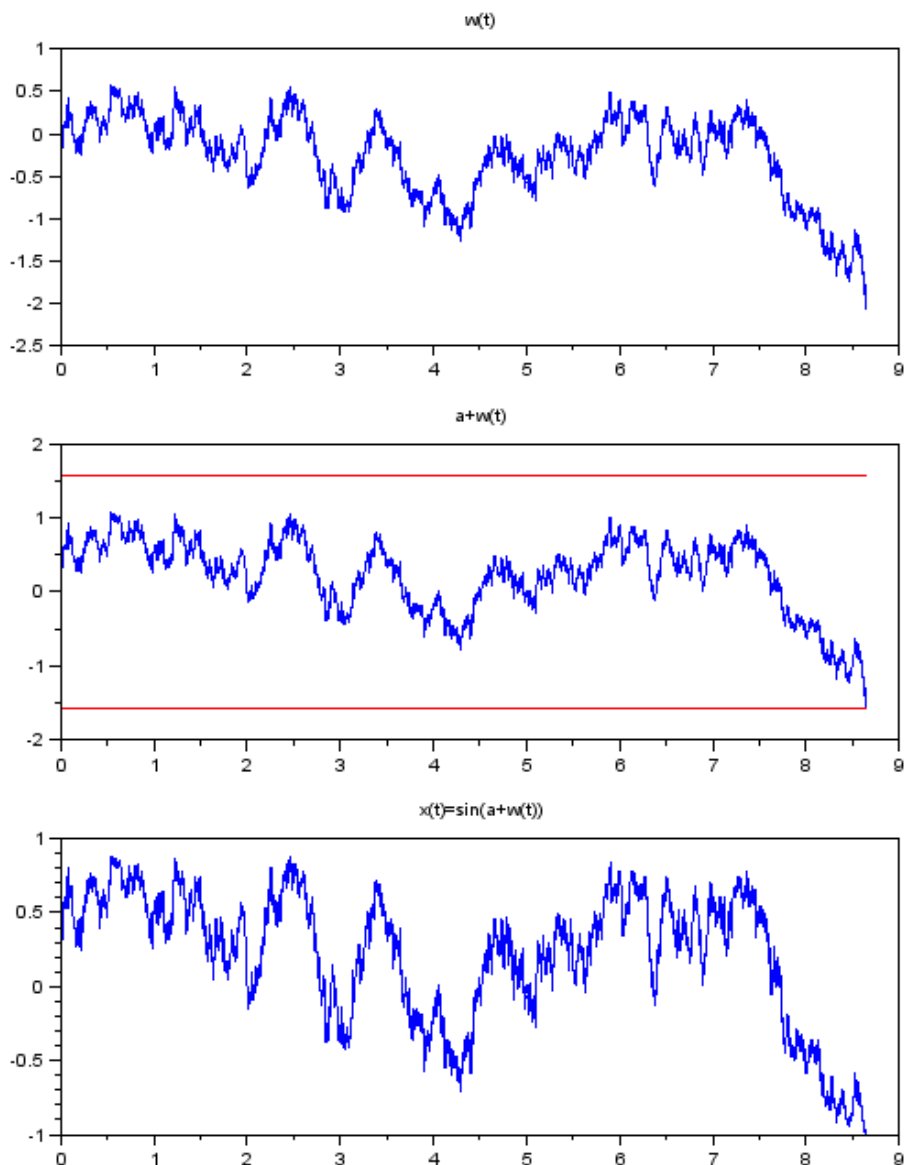
$$dx(t) = -\frac{1}{2}x(t)dt + \sqrt{1-x(t)^2}dw(t),$$

ktorá má byť splnená pre časy t vyhovujúce nerovnosti

$$t < T = \inf\{s : a + w(s) \notin [-\pi/2, \pi/2]\}$$

Kde ste pri dôkaze využili toto ohraňenie na čas t ?

Ukážka priebehu procesu a intervalu jeho existencie pre $a=1/2$:



3. Nájdite riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dx(t) = x(t)dw(t), \quad x(0) = x_0$$

Návod: Je to špeciálny prípad geometrického Brownovho pohybu.

4. Použitím substitúcie

$$x(t) = e^{y(t)}$$

nájdite riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dy(t) = -\frac{1}{2}e^{-2y(t)}dt + e^{-y(t)}dw(t), \quad y(0) = y_0$$

5. Banka modeluje výmenný kurz USD/EUR, označme ho C , geometrickým Brownovým pohybom. Všimnime si, že potom $1/C$ je výmenný kurz EUR/USD.

Pobočka banky v eurozóne potrebuje pre svoje výpočty očakávanú hodnotu výmenného kurzu USD/EUR o rok. Použitím modelu banky dostane výsledok, že je to a USD za 1 EUR. Pobočka v USA zasa pre očakávanú hodnotu výmenného kurzu EUR/USD dostane b EUR za 1 USD. Dokážte, že súčin ab je väčší ako 1.

Cvičenia z finančných derivátov, 2014
Beáta Stehliková, FMFI UK Bratislava

E-mail: stehlikova@pc2.iam.fmph.uniba.sk
Web: <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/>
