

*Deriváty, call a put opcie, ohraničenia na ceny opcií,
kombinované stratégie*

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2013/2014

Čo sú finančné deriváty

- Heslo DERIVATIVES v slovníku:

noun

1 something which is based on another source:

the aircraft is a derivative of the Falcon 20G

- a word derived from another or from a root in the same or another language:

'fly-tip' is a derivative of the phrase 'on the fly'

- a substance that is derived chemically from a specified compound:

crack is a highly addictive cocaine derivative

2 (often **derivatives**) *Finance* an arrangement or product (such as a future, option, or warrant) whose value derives from and is dependent on the value of an underlying asset, such as a commodity, currency, or security:

[*as modifier*]:

the derivatives market

3 *Mathematics* an expression representing the rate of change of a function with respect to an independent variable.

<http://oxforddictionaries.com/definition/derivative>

Deriváty

- Aristoteles o Thalesovi z Milétu (Politika, prvá kniha, kapitola XI):

... ešte v zime dal peniaze, čo mal, ako závdavok a prenajal si všetky olivové lisy v Miléte a na ostrove Chios za nepatrný obnos, lebo nikto neprihadzoval. Keď potom prišiel pravý čas a naraz a súčasne sa mnohí záujemcovia zháňali po olivových lisoch, prenajímal ich tak draho, ako chcel.

- Hodnota práva použiť všetky lisy na olivy závisí od úrody olív v danom roku
- Ak by bola nízka úroda, niektoré lisy by zostali nevyužité; Thales mal právo, ale nie povinnosť použiť lisy (resp. prenajať ich)

Deriváty

- Právo a súčasne povinnosť realizovať vopred dohodnutý obchod - ukážky z histórie:
 - Anglicko, Francúzsko, 12. storočie - dohoda budúceho obchodu na trhu na základe vzorky, „*lettre de faire*“
 - Japonsko, 17. storočie - štandardizované kontrakty s ryžou
 - Chicago, 19. storočie - obilie, vznik *Chicago Board of Trade* (1848)
 - 1898 - *Chicago Mercantile Trading*, maslo a vajcia, postupne aj rôzne iné poľnohospodárske produkty
 - 1978 - *International Monetary Market* ako súčasť *Chicago Mercantile Trading*, cudzie meny, neskôr napr. aj deriváty akciového indexu S&P 500

Akcie

- Väčšinu semestra sa budeme zaoberať derivátmi akcií
- Ukážka vývoja ceny akcie (BAC - Bank of America Corporation):

16.75

0.00 (0.03%)

Real-time: 11:42AM EST
NYSE real-time data - Disclaimer
Currency in USD

Zoom: [1d](#) [5d](#) [1m](#) [3m](#) [6m](#) [YTD](#) [1y](#) [5y](#) [10y](#) [All](#)

Jun 01, 2012 - Feb 10, 2014 +9.57 (133.85%)



Akcie

- Vývoj ceny akcie sa skladá z trendu a z náhodných fluktuácií
- Ukážka trendu (GM počas pol roka):



<http://finance.google.com>

Akcie

- Ukážka fluktuácií (GM počas jedého dňa):



<http://finance.google.com>

- Ďalšia prednáška: matematické modelovanie tohto pozorovania trend + fluktuácie

Opcie na akcie

- Európska call opcia je právo - ale nie povinnosť - kúpiť akciu za vopred dohodnutú cenu E) (expiračná cena, angl. *strike price, exercise price*) vo vopred dohodnutom čase T) (čas expirácie, splatnosť opcie, angl. *expiration time*)
- Európska put opcia je právo - ale nie povinnosť - predat' akciu za vopred dohodnutú cenu E) (expiračná cena, angl. *strike price, exercise price*) vo vopred dohodnutom čase T) (čas expirácie, splatnosť opcie, angl. *expiration time*)
- Americká call, resp. put opcia - právo kúpiť, resp. predat' akciu máme nielen v čase expirácie T), ale kedykoľvek do času expirácie

Opcie na akciu

- Ukážka reálnych dát:

Yahoo! Inc. (YHOO) - NasdaqGS

38.58 ↑ **0.47 (1.23%)** 12:26PM EST - Nasdaq Real Time Price

Options

View By Expiration: Feb 14 | Mar 14 | **Apr 14** | Jul 14 | Jan 15 | Jan 16

Call Options		Expire at close Saturday, April 19, 2014					
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
37.00	YHOO140419C00037000	3.20	↑0.27	3.15	3.25	20	36,698
38.00	YHOO140419C00038000	2.67	↑0.26	2.64	2.68	284	12,745
39.00	YHOO140419C00039000	2.18	↑0.25	2.16	2.18	126	14,271

<http://finance.yahoo.com>

Cena opcie

- Cena opcie sa skladá z dvoch častí:
 - vnútorná hodnota (angl. *intrinsic value*) - hodnota opcie, ak by bola uplatnená okamžite
 - časová hodnota (angl. *time value*) - zvyšok:
 - vlastník opcie túto hodnotu zaplatí, očakávajúc, že mu v budúcnosti opcia prinesie zisk
 - pre vypisovateľa akcie je to riziková prémie
- Predchádzajúci príklad - cena akcie je 38.58 USD
 - call opcia s expiračnou cenou 37 stála 3.20:
 - vnútorná hodnota: 1.58
 - časová hodnota: 1.62
 - call opcia s expiračnou cenou 39 stála 2.18:
 - vnútorná hodnota: 0
 - časová hodnota: 2.18

Príklad

- Predáme akciu BAC za aktuálnu ponuku na kúpu (*bid price*): 16.74 USD.

Bank of America Corporation (BAC) - NYSE ★ Follow

16.75 ↑ 0.00 (0.03%) 11:35AM EST - Nasdaq Real Time Price

Prev Close:	16.75	Day's Range:	16.63 - 16.78
Open:	16.65	52wk Range:	10.98 - 17.42
Bid:	16.74 x 82300	Volume:	40,729,668
Ask:	16.75 x 143100	Avg Vol (3m):	106,035,000
1y Target Est:	17.64	Market Cap:	177.47B
Beta:	2.03	P/E (ttm):	18.61
Earnings Date:	Apr 14 - Apr 18 (Est.)	EPS (ttm):	0.90
		Div & Yield:	0.04 (0.20%)

<http://finance.yahoo.com>

Príklad

- Ďalej predáme put opciu s expiračnou cenou 14 USD a expiráciou v apríli - vidíme ponuku na kúpu (*bid price*) za 0.06 USD .

Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
14.00	BAC140419P00014000	0.07	0.00	0.06	0.07	20	57,799
15.00	BAC140419P00015000	0.16	↓0.01	0.16	0.17	49	14,939
16.00	BAC140419P00016000	0.39	0.00	0.38	0.39	266	20,087
17.00	BAC140419P00017000	0.88	↑0.04	0.81	0.82	9	8,414
18.00	BAC140419P00018000	1.56	↑0.14	1.49	1.50	150	3,403

<http://finance.yahoo.com>

Príklad

- Koľko by ste boli ochotní zaplatiť za call opciu s rovnakou expiračnou cenou a rovnakým expiračným časom?
- Pripomeňme si vývoja ceny akcie BAC:



<http://finance.google.com>

Príklad

- Russel Sage, New York, 19. storočie:
 - kúpil od zákazníka akciu a put, a predal mu call s rovnakou expiračnou cenou a expiračným časom
 - takto obchádzal zákony o úžere
- PRÍKLAD - POKRAČOVANIE:
 - Ukážeme, že ide vlastne o pôžičku.
 - Koľko a na aký úrok ste si (vaším výberom ceny call opcie) požičali?

Call-put parita

- Uvažujme portfólio:
 - vypíšeme 1 call opciu s expiračnou cenou E
 - kúpime 1 put opciu s rovnakou expiračnou cenou a s rovnakým expiračným časom
 - kúpime 1 akciu
- Aká bude hodnota portfólia v čase expirácie opcií?

$$\textit{portfólio} = - 1 \textit{ call} + 1 \textit{ put} + 1 \textit{ akcia}$$

\Rightarrow

$$\textit{payoff} = - [\textit{payoff callu}] + [\textit{payoff putu}] + [\textit{cena akcie}]$$

Call-put parita

- Takže v závislosti od ceny akcie S v čase expirácie:
 - ak $S \leq E$:

$$payoff = -[0] + [E - S] + [S] = E$$

- ak $S \geq E$:

$$payoff = -[S - E] + [0] + [S] = E$$

Teda určite budeme mať sumu E

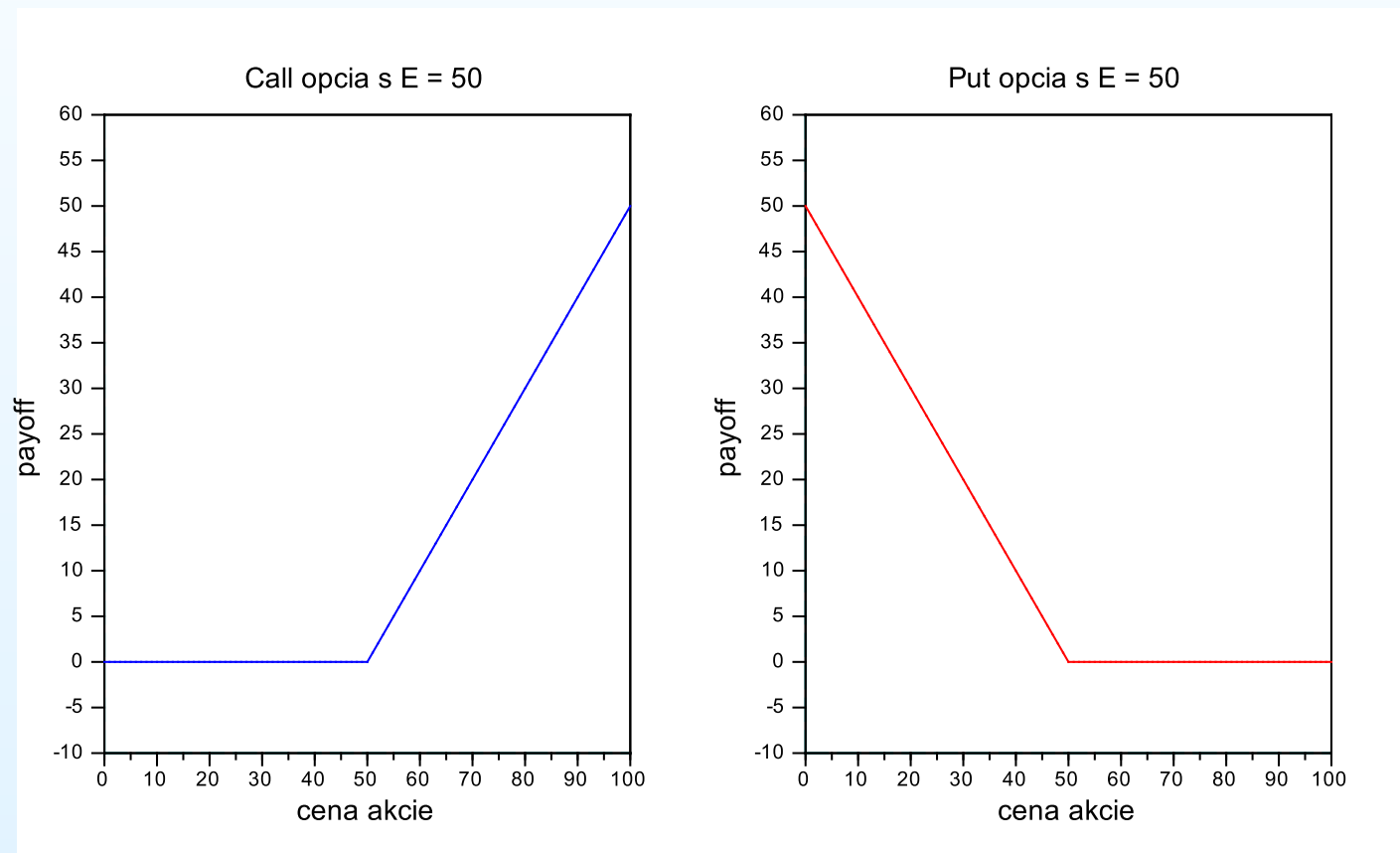
- Hodnota portfólia dnes teda musí byť

$$-c(S, E, \tau) + p(S, E, \tau) + S = Ee^{-r\tau}$$

- dostali sme vzťah medzi cenou call a put opcie, nazýva sa call-put parita

Payoff diagram

- Payoff diagram opcie (výplatný diagram) - hodnota opcie v čase expirácie v závislosti od ceny akcie v tomto čase
- Pre call: $\max(0, S - E)$, pre put: $\max(E - S, 0)$



Profit diagram

- Profit diagram opcie (zisk) - payoff opcie znížený o to, čo začiatku za opciu zaplatíme:

- Ak $r = 0$, tak

$$\textit{profit} = \textit{payoff} - \textit{náklady}$$

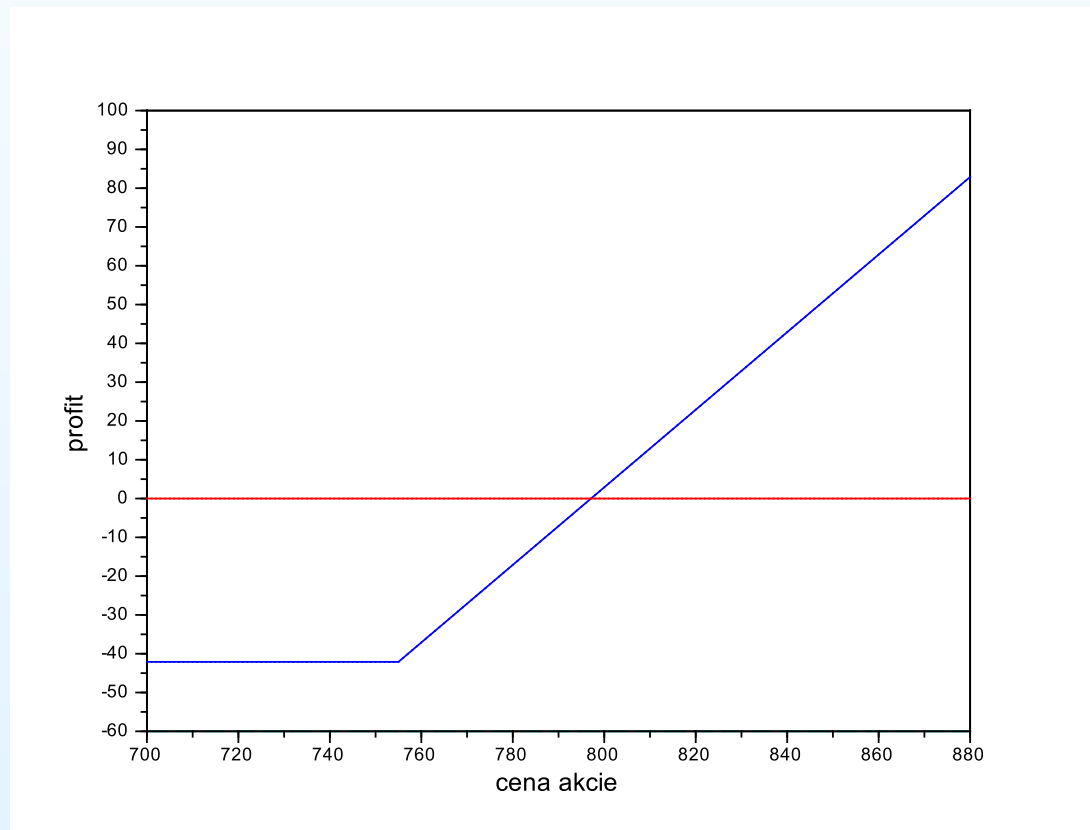
- Vo všeobecnosti:

$$\textit{profit} = \textit{payoff} - \textit{náklady} \times e^{r\tau}$$

(zaplatiť dnes sumu *náklady* je to isté, ako zaplatiť v čase expirácie sumu $\textit{náklady} \times e^{r\tau}$)

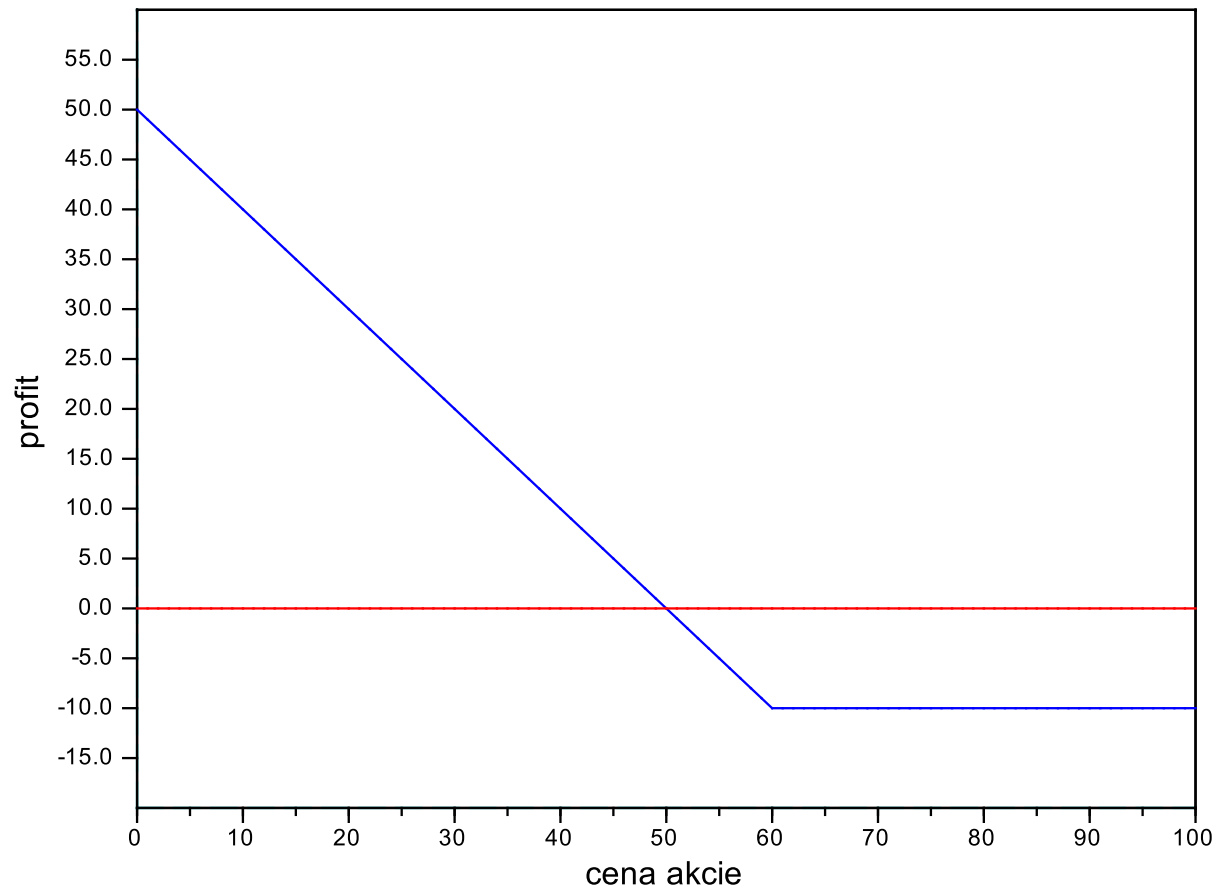
Profit diagram - príklad 1

- Majme call opciu s expiračnou cenou 755 USD, ktorá stojí 42 USD
- Profit diagram (pri $r = 0$):



Profit diagram - príklad 2

- Analyzujeme nasledovný profit diagram put opcie (pri $r = 0$):



Profit diagram - príklad 2

- JEDNODUCHÉ OTÁZKY:
 - Aká je expiračná cena opcie? Koľko táto opcia stála?
 - Je možný zisk ohraničený? Ak áno, kedy je zisk maximálny? Ak nie, kedy neobmedzene rastie?
 - Je možná strata ohraničená? Ak áno, kedy je strata maximálna? Ak nie, kedy neobmedzene rastie?
- *Premyslite si ich pred cvičením, začneme nimi cvičenie*
- Budeme takto analyzovať aj zložitejšie stratégie

Ohraničenia na ceny opcií

- Ukážeme si nejaké nerovnosti pre ceny, ktoré musia byť splnené - inak je na trhu arbitráž
- Všetky uvažované opcie majú rovnaký čas expirácie
- Úrokovú mieru označme r .
- Zaved'me označenie:
 - $c(S, E, \tau)$ je trhová cena call opcie s expiračnou cenou E , ak je dnešná cena akcie S a čas zostávajúci do expirácie je τ
 - $p(S, E, \tau)$ je trhová cena put opcie s expiračnou cenou E , ak je dnešná cena akcie S a čas zostávajúci do expirácie je τ

Ohraničenia na ceny opcií

- Postup pri dokazovaní ohraničení na ceny:
 - zostavíme dve portfóliá - také, že v čase expirácie opcií platí:
 $(\text{hodnota portfólia I.}) \leq (\text{hodnota portfólia II.})$
 - aby nebola na trhu arbitráž, aj dnes musí byť
 $(\text{hodnota portfólia I.}) \leq (\text{hodnota portfólia II.})$;
- portfóliá zvolíme tak, aby toto bola nerovnosť, ktorú potrebujeme dokázať

Ohraničenia na ceny opcií - príklady

PRÍKLAD 1: Zrejme platí:

$$c(S, E, \tau) \geq 0, p(S, E, \tau) \geq 0$$

PRÍKLAD 2: Ukážte, že

$$E_1 \geq E_2 \Rightarrow c(S, E_1, \tau) \leq c(S, E_2, \tau)$$

RIEŠENIE: Nech $E_1 \geq E_2$ Majme dve portfóliá:

portfólio I.: opcia s expiračnou cenou E_1

portfólio II.: opcia s expiračnou cenou E_2

Porovnáme ich hodnotu v závislosti od ceny akcie S v čase expirácie

Ohraničenia na ceny opcí - príklady

	$0 \leq S \leq E_2$	$E_2 \leq S \leq E_1$	$E_1 \leq S$
portfólio I.	0	0	$S - E_1$
portfólio II.	0	$S - E_2$	$S - E_2$
porovnanie	$0 = 0$	$0 \leq S - E_2$	$S - E_1 \leq S - E_2$

V čase expirácie:

(hodnota portfólia I.) \leq (hodnota portfólia II)

\Rightarrow aj dnes:

(hodnota portfólia I.) \leq (hodnota portfólia II.),

t.j.

$$c(S, E_1, \tau) \leq c(S, E_2, \tau)$$

Ohraničenia na ceny opcií - príklady

PRÍKLAD 3:

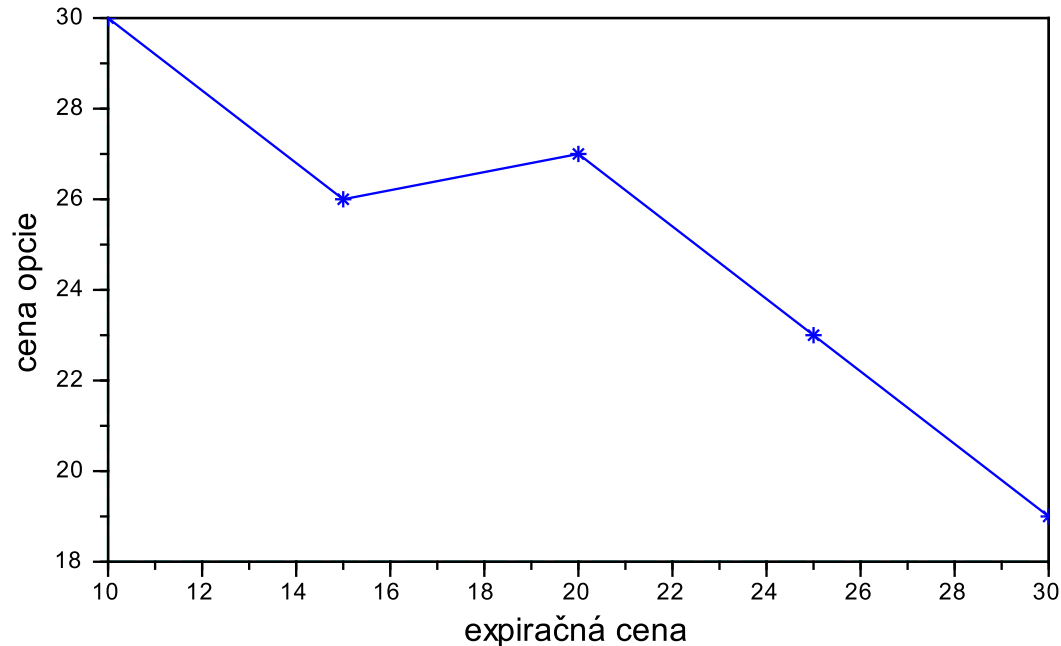
Majme nulovú úrokovú mieru a nasledovné ceny call opcií:

expiračná cena	cena opcie
10	30
15	26
20	27
25	23
30	19

Nájdite arbitráž.

RIEŠENIE: Nakreslíme si závislosť ceny call opcie od expiračnej ceny - nie je splnená klesajúcosť dokázaná v predchádzajúcom príklade.

Ohraničenia na ceny opcií - príklady



Podľa predchádzajúceho príkladu by mala platiť nerovnosť $c(S, 15, \tau) \geq c(S, 20, \tau)$, tu však $c(S, 15, \tau) < c(S, 20, \tau)$. Preto:

- kúpime to, čo je lacnejšie, ako by malo byť, v našom prípade opciu s expiračnou cenou $E = 15$,
- predáme to, čo je drahšie, ako by malo byť, v našom prípade opciu s expiračnou cenou $E = 20$.

Ohraničenia na ceny opcií - príklady

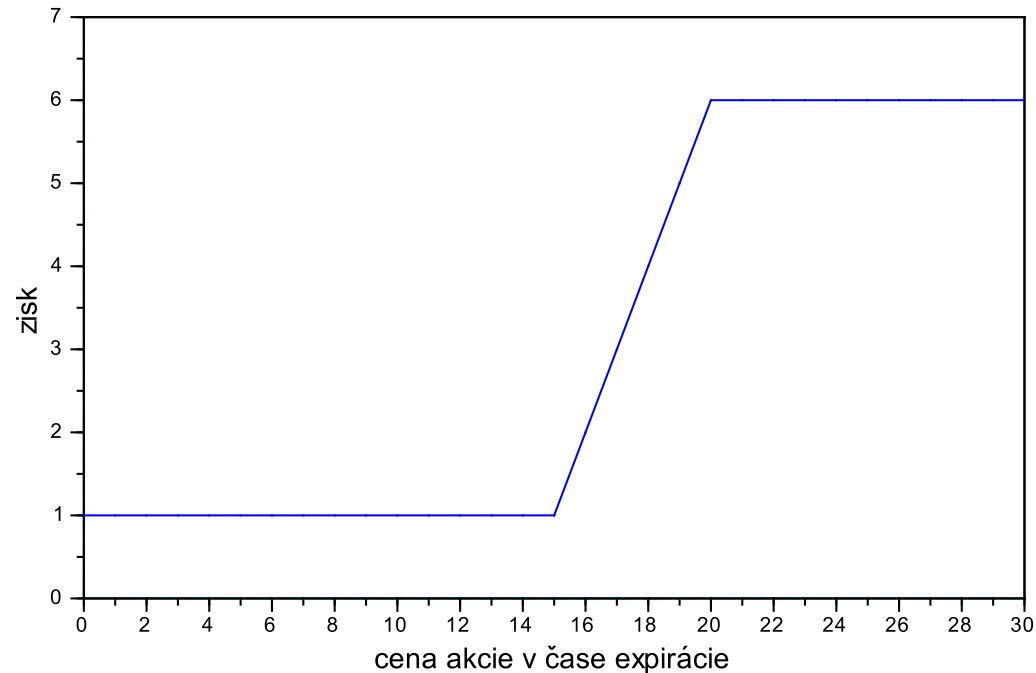
- Overíme si výsledok našej stratégie:

```
s=0:30;
payoff=max(s-15,0)-max(s-20,0);
cena=26-27;
profit=payoff-cena;
figure(1); plot(s,profit);
xlabel("cena opcie v čase expirácie"); ylabel("zisk");
```

- Čo očakávame, aký výstup? Ako vyzerá profit diagram arbitrážnej príležitosti?

Ohraničenia na ceny opcií - príklady

- Výsledok:



⇒ táto stratégia je naozaj arbitráž

- NA CVIČENÍ: ďalšie príklady ohraničení cien opcií a vyhľadávanie arbitrážnych príležitostí

Kombinované stratégie

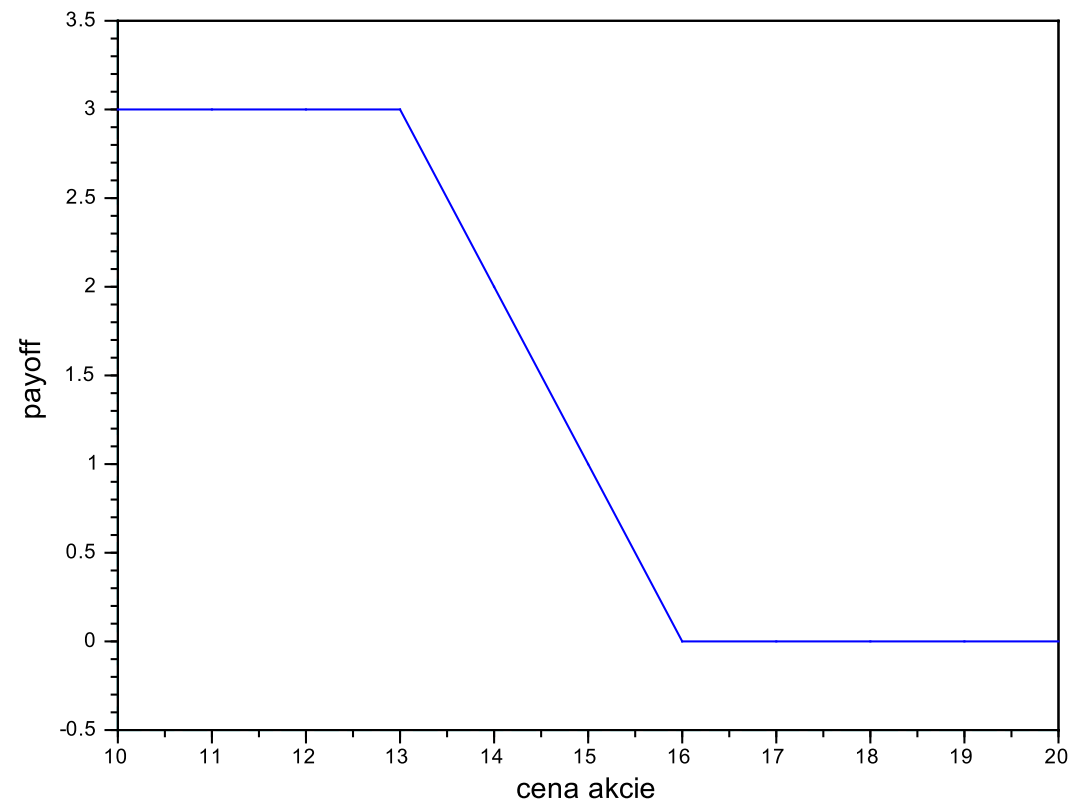
- V predchádzajúcom (teoretickom) príklade sme skombinovali opcie tak, aby sme dosiahli arbitráž
- Táto myšlienka **kúpy alebo predaja viacerých opcií** sa však dá použiť aj pri reálnych cenách - podľa nášho očakávania o vývoji ceny akcie

PRÍKLAD:

- Cena akcie je 15.12. Povedzme, že očakávame, že cena akcie bude mierne klesať \Rightarrow **kúpime put opciu**, napr. s expiračnou cenou 16 USD
- Nemyslíme si však, že klesne veľmi prudko \Rightarrow **predáme call opciu s nižšou expiračnou cenou**, napr. 14 USD
- Očakávame, že tento druhý put nebude uplatnený, ale jeho predajom si znížime náklady

Kombinované stratégie

- Payoff:



Kombinované stratégie

- Ceny opcií:

Yahoo! Inc. (YHOO) - NasdaqGS

15.12 **↑ 0.23 (1.53%)** 12:40PM EST - Nasdaq Real Time Price

Options

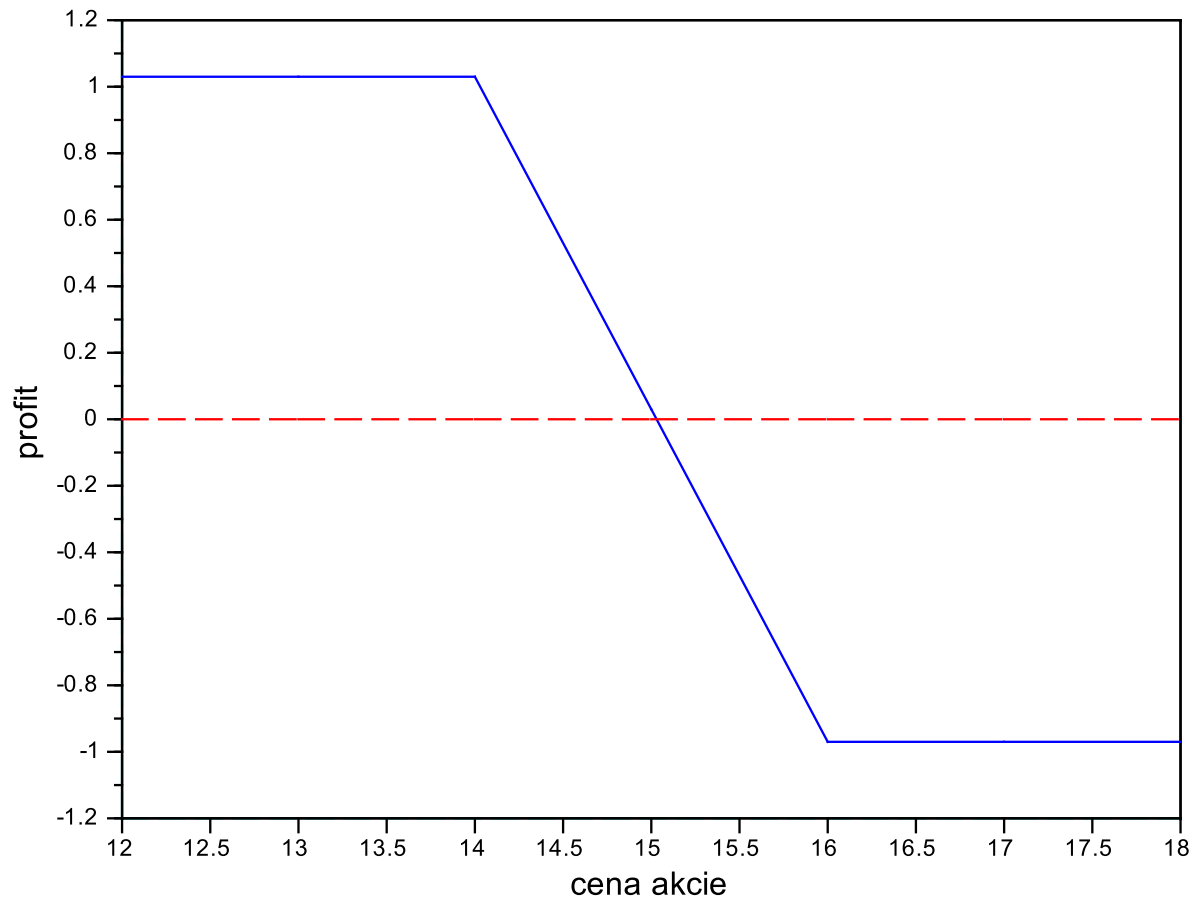
Put Options							
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
12.00	YHOO120317P00012000	0.01	0.00	N/A	0.01	18	89
13.00	YHOO120317P00013000	0.03	↓0.02	0.03	0.04	110	2,015
14.00	YHOO120317P00014000	0.12	↓0.01	0.12	0.13	2,008	17,091
15.00	YHOO120317P00015000	0.40	↑0.04	0.40	0.42	1,176	21,695
16.00	YHOO120317P00016000	1.10	↑0.13	1.07	1.09	133	18,911
17.00	YHOO120317P00017000	2.01	↑0.21	1.96	1.99	38	1,148

Kombinované stratégie

- Naša stratégia:
kúpime put s $E = 16$, predáme put s $E = 14$
- Bid a ask cena:
 - bid cena (tá nižšia) - ponuka na kúpu → ja môžem predať opciu za bid
 - ask cena (tá vyššia) - ponuka na predaj → ja môžem kúpiť opciu za ask
- Takže naše náklady sú **0.97**, lebo:
 - kúpime put s $E = 16$ za **1.09**
 - predáme put s $E = 13$ za **0.12**

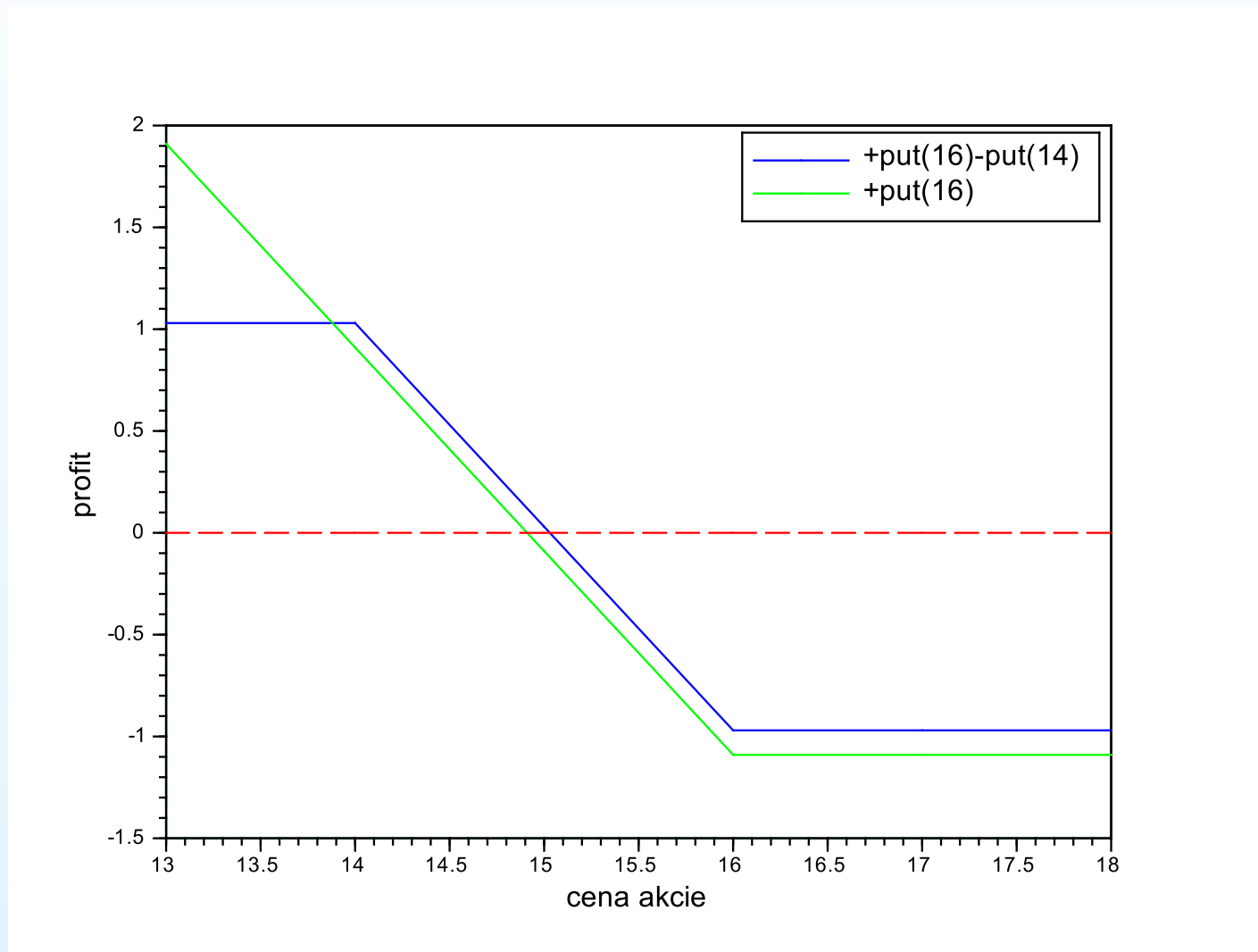
Kombinované stratégie

- Zisk, t. j. profit diagram:



Kombinované stratégie

- Porovnanie - ak by sme iba kúpili put s $E = 16$:



Kombinované stratégie

- NA CVIČENÍ:
Kombinované stratégie podľa očakávania o budúcom vývoji ceny akcie
- BONUSOVÁ DÚ:
Konštrukcia kombinovaných stratégií z reálnych dát s cieľom dosiahnuť čo najvyšší zisk
- Prehľad kombinovaných stratégií:
 - Ševčovič, Stehlíková, Mikula: **Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov**. STU 2009. - kapitola 2.3.3
 - <http://www.theoptionsguide.com/option-trading-strategies.aspx>