Stochastické procesy

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2013/2014

Stochastické procesy

- Ceny akcií - je zrejmé, že vývoj nie je deterministický, na modelovanie potrebujeme teóriu stochastických procesov:

- Stochastický proces: t-parametrický systém náhodných prem. $\{X(t), t \in I\}$, I - interval alebo diskrétna množina
- Markovov proces: pre danú hodnotu $X(s)$, nasledujúce hodnoty $X(t)$ pre $t > s$ závisia od $X(s)$, ale nie od starších hodnôt $X(u)$, $u < s$

Wienerov proces

- Wienerov proces $\{w(t), t \geq 0\}$ je náhodný proces, ktorý spĺňa:
  - i) $w(0) = 0$
  - ii) prírastky $w(t+\Delta) - w(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou Δ
  - iii) pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n$ sú prírastky

  $$w(t_1) - w(t_0), w(t_2) - w(t_1), \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1})$$

  nezávislé
  - iv) trajektórie sú spojité
- Prečo je v bode i) disperzia práve Δ , a nie napríklad $\Delta^2, \sqrt{\Delta}, \ldots$ $\rightarrow$ také voľby disperzie by viedli k sporu

Wienerov proces - poznámka k disperzii

- Nech $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ je delenie intervalu $[0, t]$. Potom:

(1) $$w(t) - w(0) = \sum_{i=1}^{n} w(t_i) - w(t_{i-1}).$$

- Z nezávislosti prírastkov (súčet disperzií nezávislých náhodných premenných je súčet ich disperzií):

$$\mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^{n} w(t_i) - w(t_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}[w(t_i) - w(t_{i-1})]$$

- Disperzia ľavej a pravej strany (1) sa musí rovnať:

$$\mathbb{D}\left[w(t) - w(0)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}[w(t_i) - w(t_{i-1})]$$

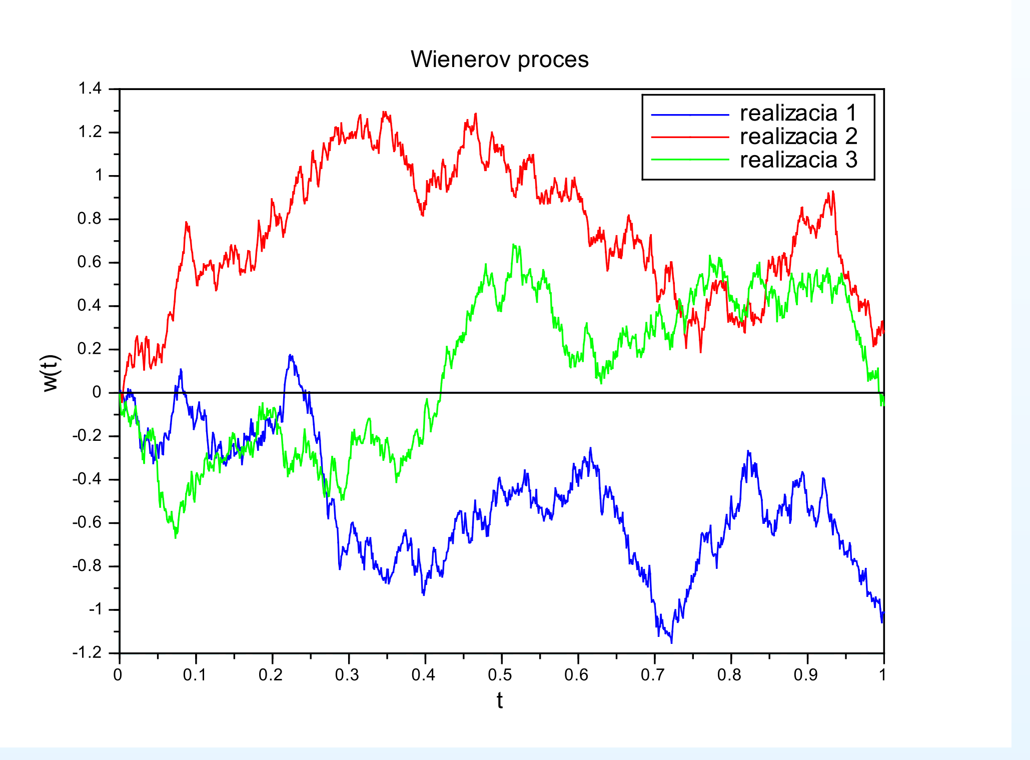
- to platí, ak $\mathbb{D}[w(t+\Delta) - w(t)]$ je násobkom Δ, znormujeme na Δ

Wienerov proces - poznámka k disperzii

- Označme $f(x) = \mathbb{D}[w(t+x) - w(t)]$; potom máme podmienku:
$$f(x_1 + x_2 + \ldots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots f(x_n).$$
- Ak navyše predpokladáme, že funkcia f je spojitá alebo monotónna (obe podmienky sú v tomto kontexte prirodzené), tak
$$f(x) = cx,$$
kde c je konštanta, je jediné riešenie
- DOMÁCA ÚLOHA:
  - Dokážte predchádzajúce tvrdenie.
  - Zopakujte si tvrdenie a jeho použitie na tento prípad, ktorým dokážete existenciu procesu s týmito vlastnosťami (zatiaľ máme iba to, že nevedú k sporu)

Wienerov proces - ukážka

- Ukážka trajektórií Wienerovho procesu:

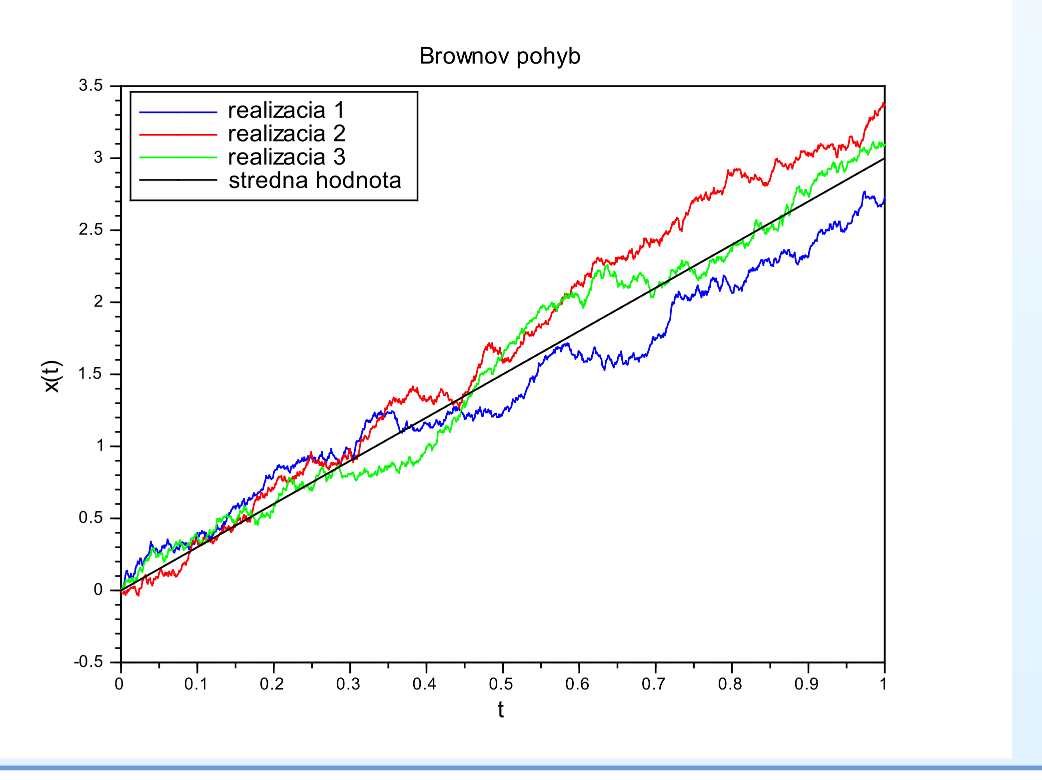


- Pre rozdelenie Wienerovho procesu v čase t platí:

$$w(t) = w(t) - w(0) \sim N(0, t)$$

Brownov pohyb

- Brownov pohyb:
$$x(t) = \mu t + \sigma w(t),$$
kde $w(t)$ je Wienerov proces
- Pravdepodobnostné rozdelenie: $x(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$
- Ukážka trajektórií spolu so strednou hodnotou:



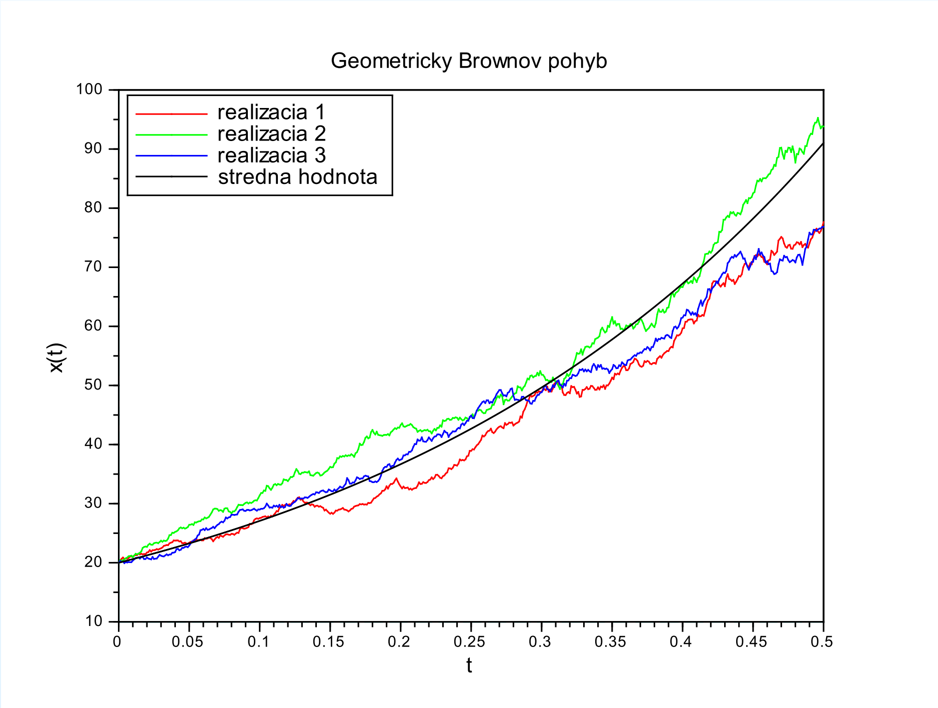
Geometrický Brownov pohyb

- Geometrický Brownov pohyb:

$$x(t) = x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t)),$$

kde $w(t)$ je Wienerov proces

- Ukážka trajektórií spolu so strednou hodnotou:



- Odvodíme teraz strednú hodnotu a disperziu GBP.

GBP - stredná hodnota, disperzia

- Pripomeňme si z pravdepodobnosti:
  Ak X je náhodná premenná s hustotou f, tak stredná hodnota náhodnej premennej $g(X)$ je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$.
- Takže napríklad: $\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f(x)dx$.
- V našom prípade:

$$\mathbb{E}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] = x_0 \mathbb{E}\left[\exp(\mu t + \sigma w(t))\right],$$

pričom

$$\mu t + \sigma w(t) \sim N(\mu t, \sigma t),$$

takže $\mu t + \sigma w(t)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}$$

GBP - stredná hodnota, disperzia

- Takže:

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu t+\sigma w(t)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\left[\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t} - x\right]} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{[x-(\mu t+\sigma^2 t)]^2 - 2\mu\sigma^2 t^2 - \sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}} dx \\
&= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{[x-(\mu t+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2 t}} dx \\
&= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}}
\end{aligned}$$

GBP - stredná hodnota, disperzia

- Disperzia:
$$\mathbb{D}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] = x_0^2\, \mathbb{D}\left[\exp(\mu t + \sigma w(t))\right]$$
- Využijeme, že disperziu náhodnej premennej X vieme vyjadriť ako $\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ - potrebujeme teda $\mathbb{E}\left[\left(e^{\mu t + \sigma w(t)}\right)^2\right]$
- Podobne ako pri výpočte strednej hodnoty:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(e^{\mu t + \sigma w(t)}\right)^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^x)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}\, dx \\
&= e^{2\mu t + 2\sigma^2 t}
\end{aligned}$$

GBP - stredná hodnota, disperzia

- Zhrnutie:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] &= x_0\, e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \\ \mathbb{D}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] &= x_0^2\, e^{2\mu t + \sigma^2 t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right) \end{aligned}$$

- Iné odvodenie týchto vzťahov:
  - odvodíme hustotu rozdelenia geometrického Brownovho pohybu (lognormálne rozdelenie - budeme s ním pracovať na cvičení) a z nej zrátame strednú hodnotu a disperziu $\rightarrow$ učebnica [Ševčovič, Stehlíková, Mikula], str. 25-26 - **výpočet hustoty a momentov naštudovať samostatne**
  - použitím Itóovej lemy $\rightarrow$ neskôr na tejto prednáške

Model pre ceny akcií

- Motivácia - reálne ceny akcie (AMZN), vyznačený trend:

http://finance.google.com

Model pre ceny akcií

- Model: cena akcie $S(t)$ sa riadi geometrickým Brownovym pohybom:

$$S(t) = S_0 \exp(\mu t + \sigma w(t)),$$

- Výnosy:
  - výpočet I: $\frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}$ - zodpovedá diskrétnemu úročeniu:

$$\frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}} = r \Rightarrow S_t = (1+r)S_{t-\Delta t}$$

  - výpočet II: $\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right)$ - zodpovedá spojitému úročeniu:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) = r \Rightarrow S_t = e^r S_{t-\Delta t}$$

Model pre ceny akcií

- Budeme používať vzorec II - budeme pracovať so spojitým časom:

$$vynos_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right)$$

- Poznamenajme, že tieto dva výpočty výnosu dajú podobný číselný výsledok:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) &= \ln\left(1 + \frac{S_t}{S_{t-\Delta t}} - 1\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}\right) \\
&\approx \frac{S_t - S_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}}
\end{aligned}$$

lebo $\ln(1+x) \approx x$ pre $x \approx 0$

Model pre ceny akcií

- Pripomeňme si model pre akciu:

$$S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$$

- Pre výnosy potom dostaneme:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) &= \ln\left(\frac{S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}}{S_0 e^{\mu(t-\Delta t) + \sigma w(t-\Delta t)}}\right) \\
&= \ln\left(e^{\mu\Delta t + \sigma(w(t) - w(t-\Delta t))}\right) \\
&= \mu\Delta t + \sigma(w(t) - w(t-\Delta t)) \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2 t)
\end{aligned}$$

a tieto výnosy sú nezávislé

Odhad parametrov GBP z cien akcií

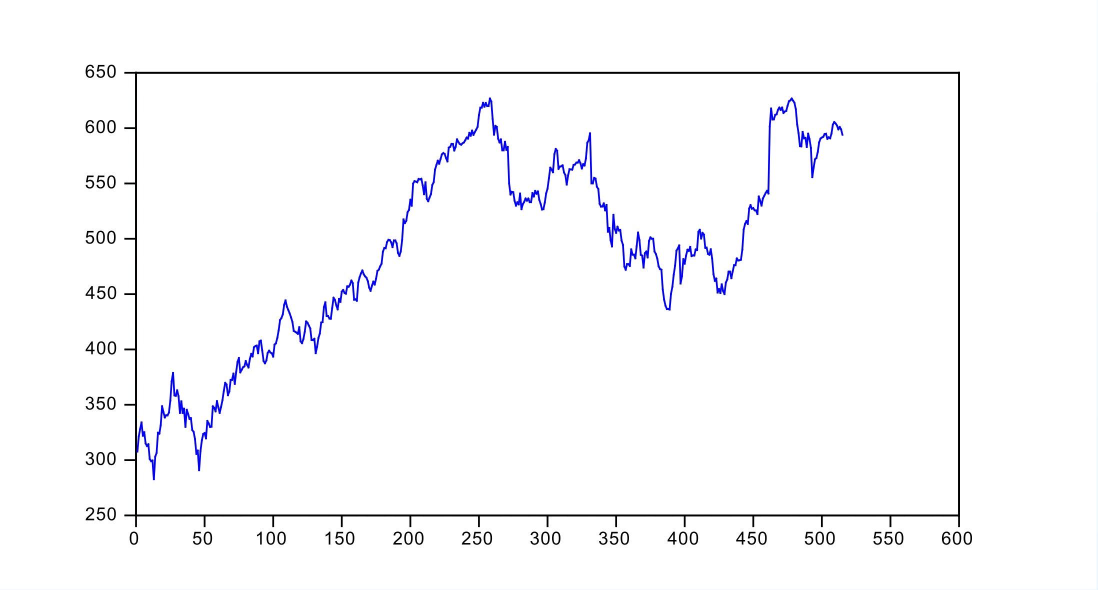
POSTUP:

1. Označme $\Delta t =$ časový interval medzi dvoma cenami akcií v rokoch
2. Vypočítame výnosy - podľa modelu sú nezávislé s rozdelením $N(\mu\Delta t, \sigma^2 t)$
3. Odhadneme ich strednú hodnotu a disperziu:
   - $m =$ aritmetický priemer výnosov $\rightarrow$ odhad strednej hodnoty $\mu\Delta$
   - $s^2 =$ výberová disperzia výnosov $\rightarrow$ odhad disperzie $\sigma^2\Delta$
4. Odhadneme parametre GBP:

$$\mu = \frac{m}{\Delta t}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{s^2}{\Delta t}}$$

Odhad parametrov z cien akcií - príklad

- Dáta: ceny akcie GOOG v rokoch 2009-2010

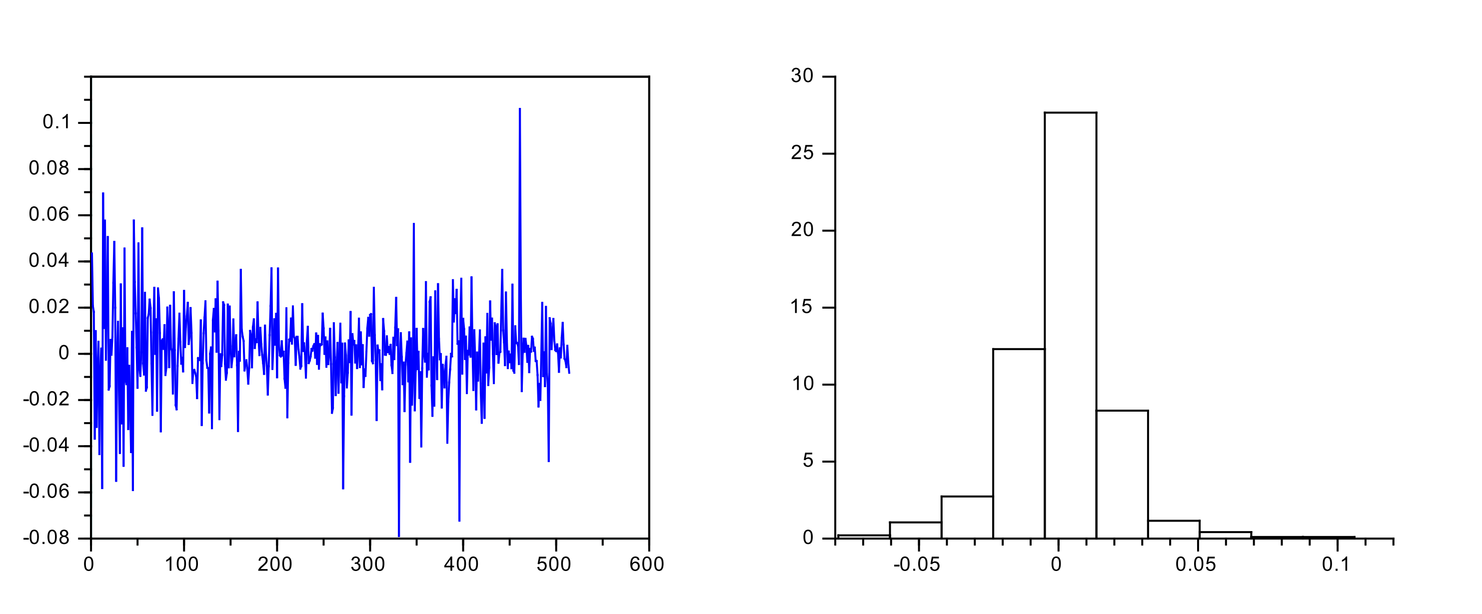


- Vypočítame výnosy:

```
n=length(s);
for i=1:n-1
  v(i)=log(s(i+1)/s(i));
end;
```

Odhad parametrov z cien akcií - príklad

- Získané výnosy - priebeh a histogram:



- Výpočet odhadov parametrov:

```
miDelta=mean(v);
sigma2Delta=variance(v); // v Matlabe: var(), v Scilabe: variance()

mi=miDelta/dt
sigma=sqrt(sigma2Delta/dt)
```

Odhad parametrov z cien akcií - príklad

- Výsledky:

```
-->mi=miDelta/dt
 mi  =

    0.3225335

-->sigma=sqrt(sigma2Delta/dt)
 sigma  =

    0.2876693
```

- Čo s tým → NA CVIČENÍ:
  - simulácia budúceho vývoja, stredná hodnota, porovnanie so skutočnosťou
  - pravdepodobnostné rozdelenie ceny akcie a výnosov
  - výpočet pravdepodobností rôznych udalostí

Itóova lema

In precisely built mathematical structures, mathematicians find the same sort of beauty others find in enchanting pieces of music, or in magnificent architecture.

...

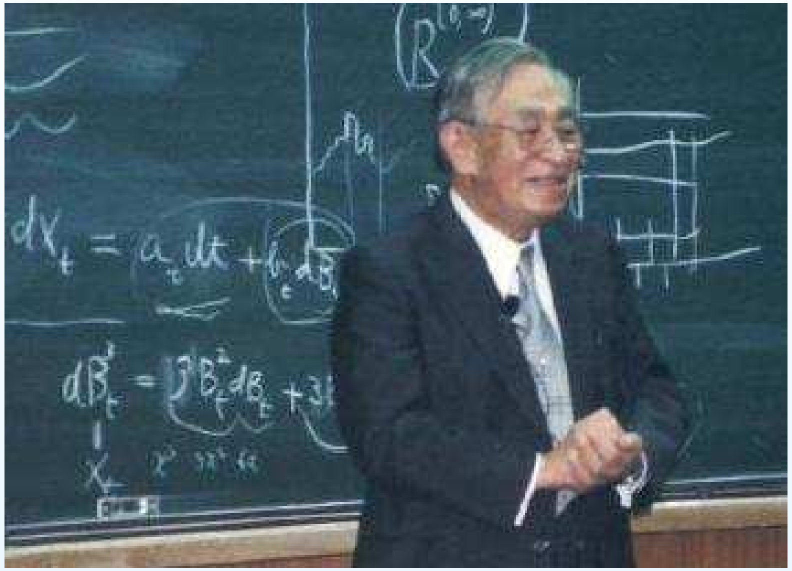
Without numerical formulae, I could never communicate the sweet melody played in my heart. Stochastic differential equations, called "Ito Formula", are currently in wide use for describing phenomena of random fluctuations over time. When I first set forth stochastic differential equations, however, my paper did not attract attention. It was over ten years after my paper that other mathematicians began reading my "musical scores" and playing my "music" with their "instruments."

K. Ito, My Sixty Years in Studies of Probability Theory:

acceptance speech of the Kyoto Prize in Basic Sciences (1998).

Itóova lema

- Itóova lema - ako počítať diferenciál náhodných funkcií:



- Na obrázku:
  Čomu sa rovná dx, ak $x = w^3$, kde w je Wienerov proces?

Itóova lema - znenie

Nech $f(x,t)$ je C^2 hladká funkcia premenných x, t a nech proces $\{x(t), t \geq 0\}$ vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dW,$$

Potom

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dw \end{aligned}$$

Itóova lema - intuitívny dôkaz

- Taylorov rozvoj do druhého rádu:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dx\,dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\right) + \ldots$$

- Z toho, že $dw = \Phi\sqrt{dt}$, kde $\Phi \approx N(0,1)$, dostaneme

$$\begin{aligned} (dx)^2 &= \sigma^2(dw)^2 + 2\mu\sigma dw\,dt + \mu^2(dt)^2 \\ &\approx \sigma^2 dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2) \end{aligned}$$

- Podobne: $dx\,dt = O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)$
- Členy rádu dt, dw v rozvoji df teda sú:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt$$

Itóova lema - príklady

- PRÍKLAD 1: Úloha z obrázku:

$$d(w^3) = 3w^2 dw + 3w dt$$

- PRÍKLAD 2: Cena akcie riadiaca sa geometrickým Brownovym pohybom $S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$:

$$dS = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S dt + \sigma S dw$$

- PRÍKLAD 3: Niekedy sa model pre cenu akcie píše v tvare

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

  - tiež je to GBP, ale s inými parametrami:

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma w(t)}$$

- Ďalšie na cvičení

Momenty GBP: výpočet pomocou Itóovej lemy

- Nech $Y(t) = x_0 \exp(X(t))$, kde $X(t) = \mu t + \sigma w(t)$
- Zvolili sme $f(t,x) = x_0 e^x \;\Rightarrow$

$$dY = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) Y\,dt + \sigma Y\,dw$$

- Z toho:

$$\begin{aligned} d\mathbb{E}[Y] &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathbb{E}[Y]dt + \sigma \mathbb{E}[Y\,dw] \\ &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathbb{E}[Y]dt \end{aligned}$$

  čo je ODR pre $\mathbb{E}Y(t)$
- Začiatočná podmienka: $\mathbb{E}Y(0) = x_0$
- Riešenie tejto ODR so zač. podm.: $\mathbb{E}[Y] = x_0 e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}$

Momenty GBP: výpočet pomocou Itóovej lemy

Na výpočet $\mathbb{D}[Y]$ potrebujeme $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[x_0^2 \exp(X(t))^2]$:

- Zvolíme $f(t,x) = x_0^2(e^x)^2 = x_0^2 e^{2x} \Rightarrow$

$$d(Y(t)^2) = df = 2(\mu + \sigma^2)Y(t)^2 dt + 2\sigma Y(t)^2 dw$$

- Z toho:

$$d\mathbb{E}[(Y(t)^2)] = 2(\mu + \sigma^2)\mathbb{E}[(Y(t)^2]dt$$

  čo je ODR pre $\mathbb{E}[Y^2]$

- Začiatočná podmienka: $\mathbb{E}[Y(0)^2] = x_0^2$
- Domáca úloha: Dokončite tento výpočet.

Itóova lema pri oceňovaní derivátov

- Prvý krok pri odvodení Black-Scholesovho modelu na oceňovanie derivátov:
  - Predpokladajme, že cena akcie sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou $dS = \mu S dt + \sigma S dw$
  - Cena derivátu V (napr. opcie) závisí od času t a od ceny akcie S, teda $V = V(S, t)$
  - Stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu potom dostaneme použitím Itóovej lemy

Viacrozmerná Itóova lema: všeobecne

- Derivát môže závisieť aj od viacerých podkladových aktív
- Príklad: spread option - hodnota opcie závisí od rozdielu dvoch aktív, napr. opcia s payoffom

$$V(S_1, S_2, T) = \max(0, S_1 - S_2)$$

- Potrebujeme dV pre $V = V(S_1, S_2, t)$

Viacrozmerná Itóova lema: všeobecne

- Náhodné procesy (pre $i = 1, \ldots, n$)

$$dx_i = \mu_i(\vec{x}, t)dt + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(\vec{x}, t)dw_k,$$

kde $\vec{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)'$ je vektor Wienerovych procesov so zadanou korelačnou maticou $(\rho_{ij})_{i,j=1}^{n}$

$$\mathbb{E}[dw_i\, dw_j] = \rho_{ij} dt$$

- Hladká funkcia

$$f = f(\vec{x}, t) = f(x_1, x_2, ..., x_n, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}$$

- Počítame df

Viacrozmerná Itóova lema: všeobecne

- Znovu Taylorov rozvoj:

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \nabla_x f . d\vec{x} \\
&+ \frac{1}{2}\left((d\vec{x})^T \nabla_x^2 f \, d\vec{x} + 2\frac{\partial f}{\partial t}.\nabla_x f d\vec{x}\, dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 \right) + \ \ldots
\end{aligned}
$$

- Členy $dt\, dx_i$, $(dt)^2$ sú vyššieho rádu ako dt
- Členy $dx_i\, dx_j$:

$$
\begin{aligned}
dx_i\, dx_j &= \sum_{k,l=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{jl} dw_k\, dw_l + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2) \\
&\approx \sum_{k,l=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{jl}\rho_{kl} dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)
\end{aligned}
$$

Viacrozmerná Itóova lema

Vysvetlíme si ju na príklade:

- PRÍKLAD:
  Vypočítajte dV, ak $V = V(t, S_1, S_2)$, pričom S_1 a S_2 sú geometrické Brownove pohyby

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sigma_i S_i dw_i \quad (i = 1, 2)$$

a $Cor(w_1, w_2) = \rho$.