Black-Scholesov model: odvodenie a riešenie

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Obsah

- Black-Scholesov model:
  - Predpokadáme, že cena akcie S riadi geometrickým Brownovym pohybom

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

  + ďalšie predpoklady (o chvíľu)
  - Odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu
- Dva spôsoby odvodenia:
  - podľa Blacka a Scholesa
  - podľa Mertona
- Explicitné riešenie pre európsku call a put opciu

Predpoklady

- Ďalšie predpoklady (okrem GBP):
  - konštantná bezriziková úroková miera r
  - žiadne transakčné náklady
  - dajú sa kupovať/predávať ľubovoľné (aj neceločíselné) počty akcií; rovnako hotovosť
  - žiadne obmedzenia na krátke pozície (*short selling*)
  - opcia je európskeho typu
- Uvažujme najprv akciu nevyplácajúcu dividendy

Odvodenie I. - podľa Blacka a Scholesa

- Označenie:
  $S =$ cena akcie, $t =$čas
  $V = V(S,t) =$ cena opcie
- Portfólio: 1 opcia, δ akcií
  $P =$ hodnota portfólia: $P = V + \delta S$
- Zmena hodnoty portfólia: $dP = dV + \delta dS$
- Podľa predpokladu: $dS = \mu S dt + \sigma S dw,$ z Itóovej lemy:
  $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw$
- Teda:

$$\begin{aligned} dP &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt \\ &+ \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \delta \sigma S \right) dw \end{aligned}$$

Odvodenie I. - podľa Blacka a Scholesa

- Eliminujeme náhodnosť: $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$
- Nenáhodné portfólio $\Rightarrow$ jeho hodnota musí byť taká, ako by sme dosiahli uložením do banky na úrok r: $dP = rPdt$
- Dáme do rovnosti získané dva vzťahy pre dP a dosadíme $P = V + \delta S$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Zahrnutie dividend do modelu

- Uvažujeme spojitú dividendovú mieru q - držaním akcie v hodnote S získame za čas dt dividendový podiel $qSdt$
- V takomto prípade sa zmena hodnoty portfólia rovná $dP = dV + \delta dS + \delta qSdt$
- Ďalej postupujeme rovnako; dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Odvodenie podľa Mertona - motivácia

- Problém s predchádzajúcim odvodením:
  - máme portfólio pozostávajúce z 1 opcie a δ akcií
  - počítame hodnotu a zmenu hodnoty portfólia:

$$\begin{aligned} P &= V + \delta S \\ dP &= dV + \delta\, dS \end{aligned}$$

    teda δ považujeme za konštantu
  - výjde nám však $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$

Odvodenie II. - podľa Mertona

- Portfólio pozostávajúce z opcií, akcií a hotovosti s vlastnosťami:
  - v každom čase má nulovú hodnotu
  - je samofinancované - neprináša výnos ani nevyžaduje dodatočné investície
- Označenie:
  $Q_S =$ počet akcií, každá má hodnotu S
  $Q_V =$ počet opcií, každá má hodnotu V
  $B =$ hotovosť na účte, peniaze spojito úročené úrokovou mierou r

  $dQ_S =$ zmena v počte akcií
  $dQ_V =$ zmena v počte opcií
  $\delta B =$ zmena hotovosti spôsobená kúpou/predajom akcií a opcií

Odvodenie II. - podľa Mertona

- Matematický zápis požiadaviek na portfólio:
  - nulová hodnota: $S\,Q_S + V\,Q_V + B = 0$ (1)
  - samofinancovanosť: $S\,dQ_S + V\,dQ_V + \delta B = 0$ (2)
- Zmena hotovosti: $dB = r B\,dt + \delta B$
- Zdiferencujeme vzťah (1):

$$
\begin{aligned}
0 &= d\,(SQ_S + VQ_V + B) = d\,(SQ_S + VQ_V) + \overbrace{dB}^{rB\,dt+\delta B} \\
0 &= \overbrace{SdQ_S + VdQ_V + \delta B}^{=0} + Q_S dS + Q_V dV + rB\,dt \\
0 &= Q_S dS \; + \; Q_V dV \; \overbrace{- r(SQ_S + VQ_V)}^{rB}\, dt.
\end{aligned}
$$

Odvodenie II. - podľa Mertona

- Vydelíme Q_V a označíme $\Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}$:
  $dV - rV\,dt - \Delta(dS - rS\,dt) = 0$
- Dosadíme dS z predpokladu o geometrickom Brownovom pohybe a dV z Itóovej lemy
- Zvolíme Δ (t. j. pomer počtu akcií a opcií) tak, aby sme eliminovali náhodnoť (aby sa vynuloval člen pri dw)
- Dostaneme rovnakú PDR ako predtým:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Dividendy v Mertonovom odvodení

- Uvažujeme spojitú dividendovú mieru q.
- Dividendy predstavujú príjem hotovosti $\Rightarrow$ zmena hotovosti bude $dB = rB\,dt + \delta B + qSQ_S dt$
- Rovnakým postupom sa potom dopracujeme k PDR

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Black-Scholesova PDR - zhrnutie

- Matematická formulácia modelu:
  Nájsť riešenie $V(S,t)$ parciálnej diferenciálnej rovnice (tzv. Black-Scholesovej rovnice)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

  ktorá je definovaná pre $S > 0, t \in [0,T]$.

- Zatiaľ sme nevyužili, že ide o opciu $\Rightarrow$ PDR platí pre ľubovoľný derivát, ktorý vypláca v čase T výplatu závilsú od ceny akcie v tom čase
- Typ derivátu určuje koncovú podmienku v čase T
- Napríklad pre call opciu: $V(S,T) = \max(0, S-E)$
- Vo všeobecnosti: $V(S,T) =$ payoff derivátu

Riešenie pre call opciu

ZADANIE ÚLOHY

- Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

  ktorá je definovaná pre $S > 0, t \in [0, T]$.
- Koncová podmienka:

$$V(S, T) = \max(0, S - E)$$

  pre $S > 0$

Riešenie pre call opciu

KROK 1:

- Transformácia $x = \ln(S/E) \in \mathbb{R}$, $\tau = T - t \in [0, T]$ a nová funkcia $Z(x, \tau) = V(Ee^x, T - \tau)$
- PDR pre $Z(x, \tau)$, $x \in \mathbb{R}, \tau \in [0, T]$:

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) \frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0,$$

$$Z(x, 0) = \max(Ee^x - E, 0)$$

KROK 2:

- Transformácia na rovnicu vedenia tepla
- Nová funkcia $u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} Z(x, \tau)$, pričom konštanty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sa určia tak, aby rovnica pre u bola RVT

Riešenie pre call opciu

- Rovnica pre u:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0\,,$$

$$u(x,0) = Ee^{\alpha x}\max(e^x - 1, 0),$$

kde

$$A = \alpha\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} - r,\; B = (1+\alpha)r - \beta - \frac{\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2}{2}\,.$$

- Aby bolo $A = B = 0$, zvolíme

$$\alpha = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2},\; \beta = \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r^2}{2\sigma^2}$$

Riešenie pre call opciu

KROK 3:

- Riešenie $u(x,\tau)$ začiatočnej úlohy $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ je dané Greenovym vzorcom

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} u(s,0)\, ds\,.$$

- Dosadíme, spravíme spätné transformácie $u(x,\tau) \to Z(x,\tau) \to V(S,t)$ a vypočítame integrál

Riešenie pre call opciu

VÝSLEDOK:

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

kde $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi$ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$ a

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Riešenie pre call opciu

DÚ:
Vyriešte Black-Scholesovu rovnicu pre call opciu na akciu vyplácajúcu dividendy a upravte riešenie do tvaru

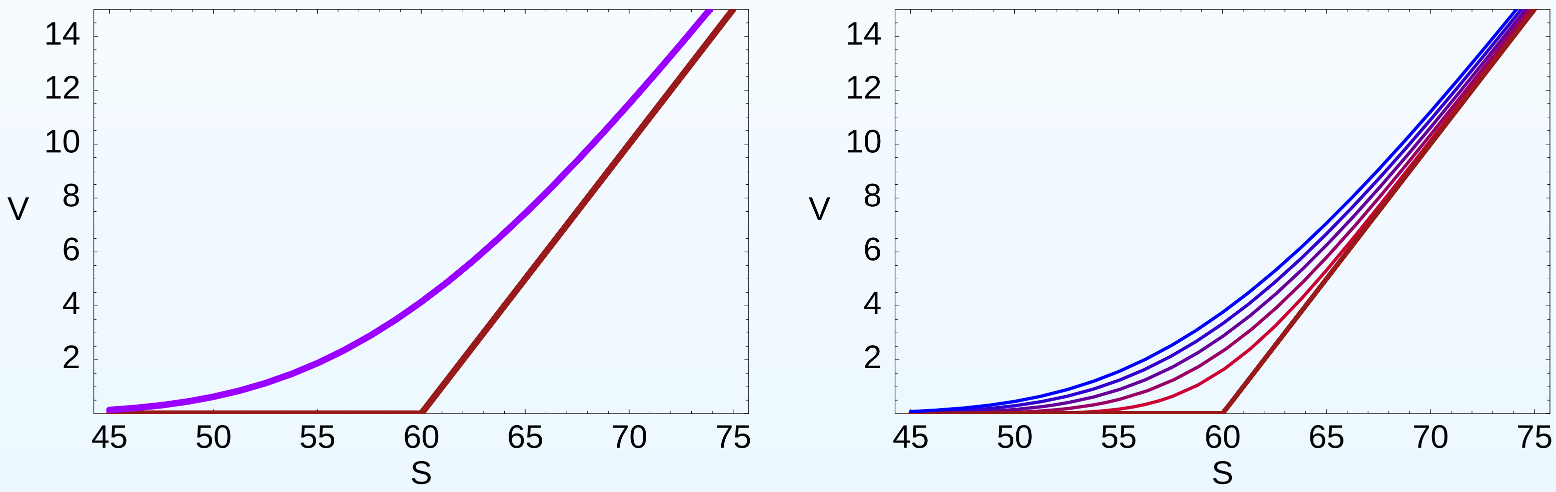
$$V(S,t) = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

kde $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi$ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$ a

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Call opcia - ukážka riešenia

Payoff (t. j. koncová podmienka v čase $t = T$) a riešenie $V(S,t)$ v niekoľkých časoch t:



Riešenie pre put opciu

Zadanie úlohy

- Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

  ktorá je definovaná pre $S > 0, t \in [0, T]$.

- Koncová podmienka:

$$V(S, T) = \max(0, E - S)$$

  pre $S > 0$

Riešenie pre put opciu

MOŽNOSŤ I.

- Rovnaká postupnosť transformácií ako v prípade call opcie

MOŽNOSŤ II.

- Využijeme linearitu Black- Scholesovej PDR a už nájdené riešenie pre call opciu

Ukážeme si druhú možnosť nájdenia riešenia

Riešenie pre put opciu

- Pripomeňem si, že pre payoff callu a putu platí:

$$-[payoff\ callu] + [payoff\ putu] + [cena\ akcie] = E$$

- Teda:

$$[payoff\ putu] = [payoff\ callu] - S + E$$

- Black-Scholesova rovnica je lineárna: lineárna kombinácia riešení je znovu riešením
- Ako oceniť deriváty s nasledujúcimi payoffmi:
  - $V(S,T) = S$ $\rightarrow$ je to vlastne akcia $\rightarrow V(S,t) = S$
  - $V(S,T) = E$ $\rightarrow$ s istotou dostaneme sumu E $\rightarrow$ $V(S,t) = Ee^{-r(T-t)}$

  - dosadením do PDR sa presvedčíme, že sú to naozaj riešenia

Riešenie pre put opciu

- Máme teda:

koncová podmienka	riešenie
$\max(0, S-E)$	$V^{call}(S,t)$
S	S
E	$Ee^{-r(T-t)}$

- Z lineárnosti:

koncová podmienka	riešenie
$\max(0, S-E) - S + E$	$V^{call}(S,t) - S + Ee^{-r(T-t)}$

- Keďže $[payoff\ putu] = \max(0, S-E) - S + E$, tak

$$V^{put}(S,t) = V^{call}(S,t) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

Riešenie pre put opciu

- Nájdené riešenie

$$V^{put}(S,t) = V^{call}(S,t) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

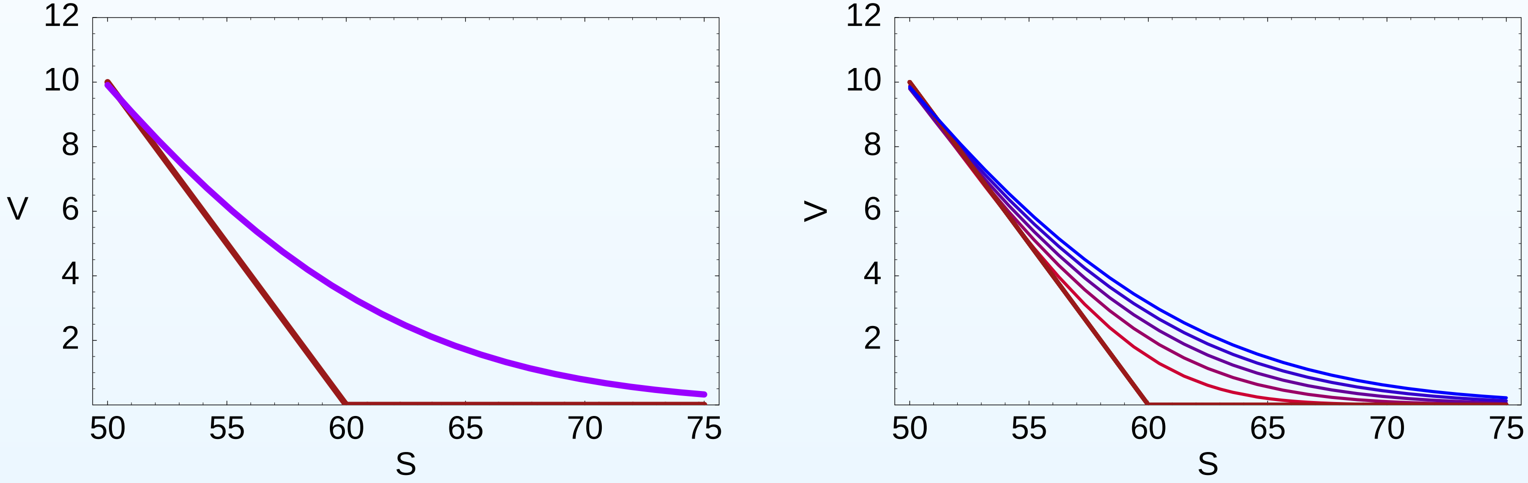
sa dá zapísať do podobného tvaru ako riešenie pre call opciu:

$$V^{ep}(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

kde $N(.), d_1, d_2$ sú definované rovnako ako v prípade call opcie

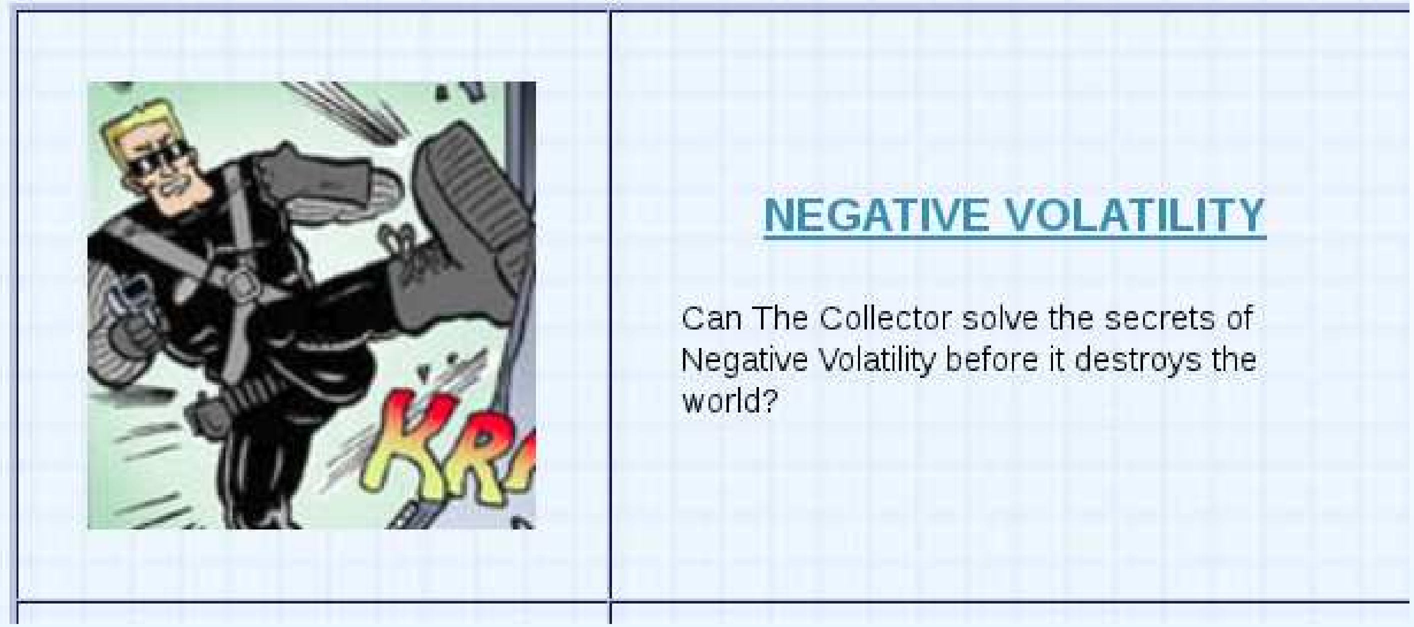
Put opcia - ukážka riešenia

Payoff (t. j. koncová podmienka v čase $t = T$) a riešenie $V(S,t)$ v niekoľkých časoch t:



Put opcia - alternatívny výpočet

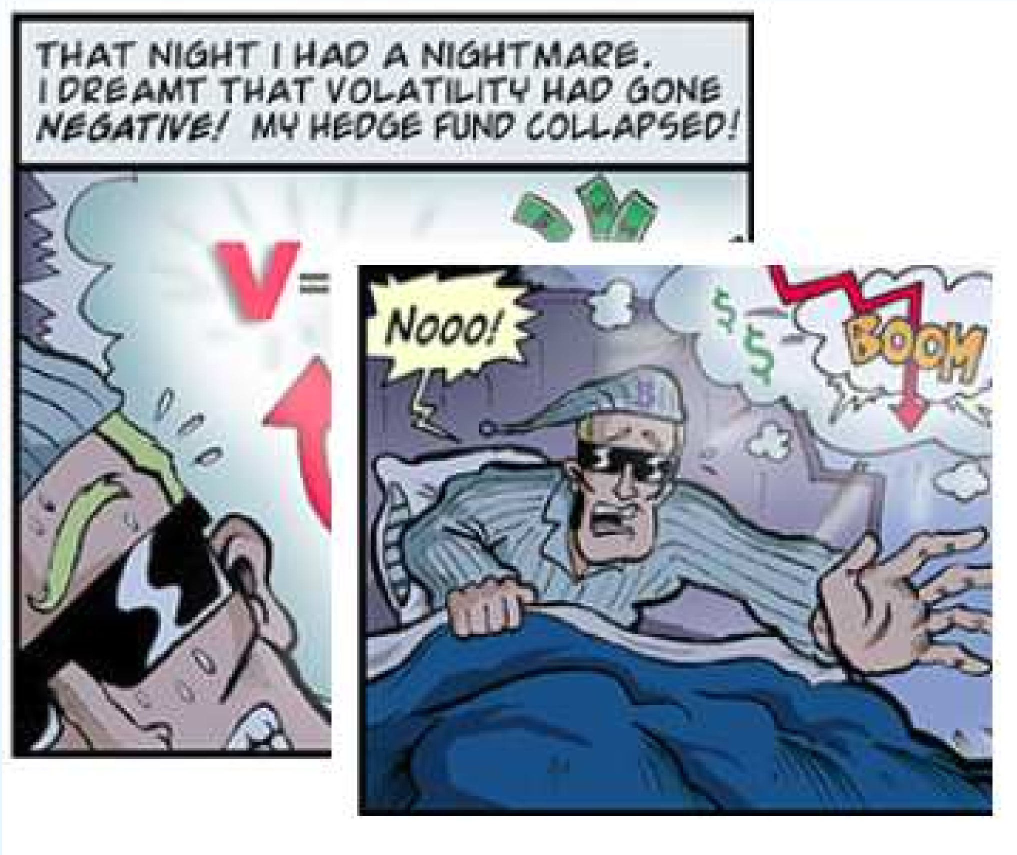
Komiks o zápornej volatilite na stránke Espena Hauga:



http://www.espenhaug.com/collector/collector.html

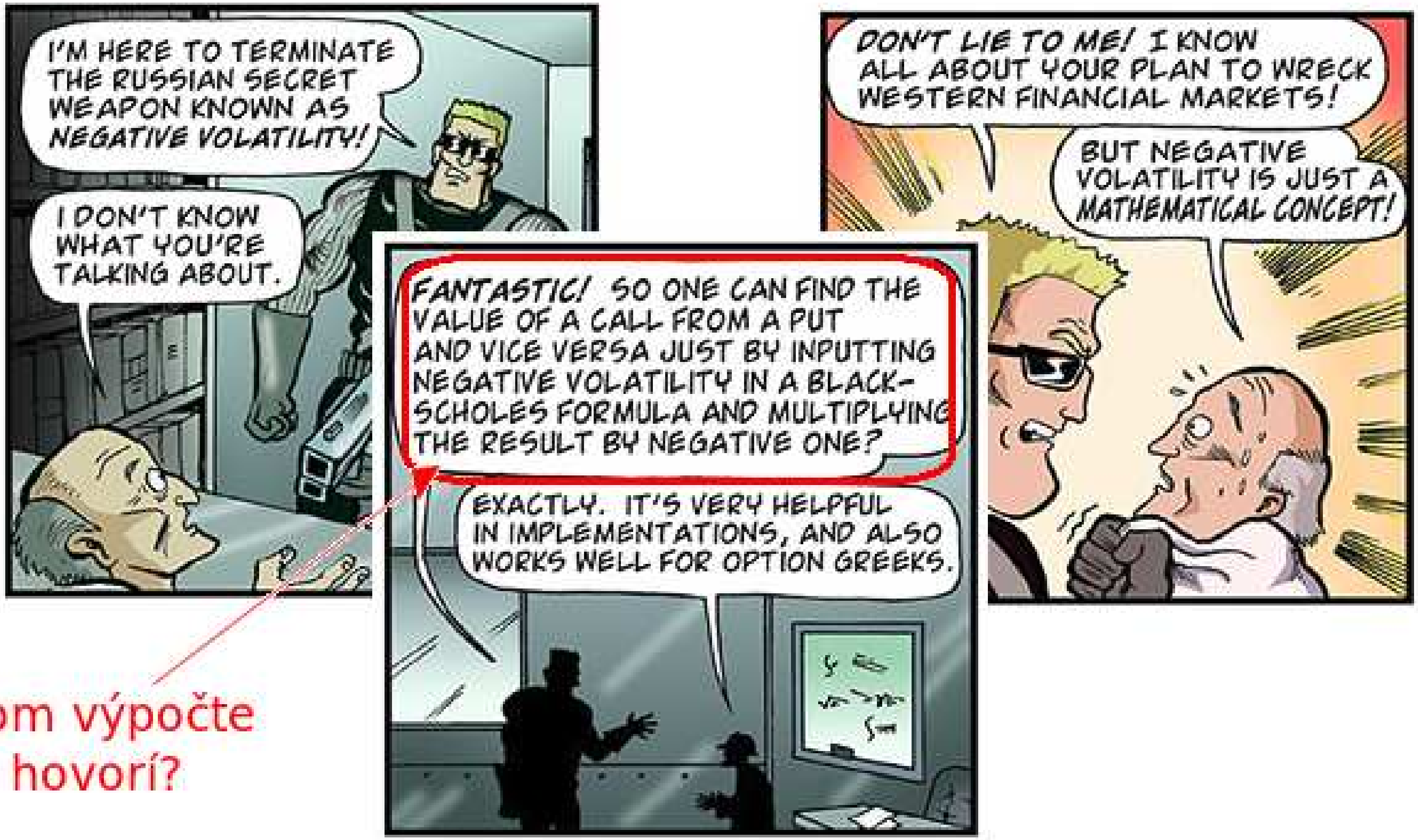
Put opcia - alternatívny výpočet

- Zlý sen o zápornej volatilite:



- Nebol je to len sen... podľa internetu niečo také existuje a je za tým profesor Širiaev z Moskvy

Put opcia - alternatívny výpočet



o akom výpočte
sa tu hovorí?

Prečo tento postup výpočtu ceny dáva správne výsledky?

Akcie s dividendami

- DÚ:
  Vyriešte Black-Scholesovu rovnicu pre put opciu na akciu vyplácajúcu dividendy.

  NÁVOD:
  - $V(S,t) = S$ už nie je riešením PDR
  - Ako sa zmení riešenie rovnice pre koncovú podmienku $V(S,T) = S$?

- DÚ:
  Označme $V(S,t;E,r,q)$ cenu opcie s expiračnou cenou E, ak úroková miera je r a dividendová miera je q.
  Dokážte, že

$$V^{put}(S,t;E,r,q) = V^{call}(E,t;S,q,r)$$

  NÁVOD: Ako sa zmenia $d_1 d_2$ pri zámene $S \leftrightarrow E$, $r \leftrightarrow q$?

Kombinované stratégie

- Z linearity Black-Scholesovej rovnice: ak je payoff stratégie lineárnou kombináciou call a put opcií, tak jej cena je takou istou lineárnou kombináciou cien call a put opcií
- Neplatí to v každom modeli:
  - predstavme si model s nejakými transakčnými nákladmi; nie je jedno, či
    - hedžujem samostatne jednotlivé opcie
    - hedžujem portfólio - transakčné náklady sa môžu znížiť

Kombinované stratégie

PRÍKLAD:

- kúpime call opciu s expiračnou cenou E_1, E_3 a predáme dve call opcie s expiračnou cenou E_2, pričom $E_1 < E_2 < E_3$ a $E_1 + E_3 = 2E_2$.
- Payoff stratégie sa dá vyjadriť ako $V(S,T) = \max(S-E_1, 0) - 2\max(S-E_2, 0)+\max(S-E_3, 0)$
- Takže riešenie je: $V(S,t) = V^{call}(S,t;E_1) - 2V^{call}(S,t;E_2) + V^{call}(S,t;E_3)$

Kombinované stratégie

- Numerická ukážka riešenia: