Black-Scholesov model: implikovaná volatilita

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

Trhové dáta

- 21.2.2014, začiatok obchodovania na burze
- Akcia firmy General Motors:

General Motors Company (GM) - NYSE ★ Follow

36.51 **0.00 (0.00%)** 9:32AM EST - Nasdaq Real Time Price

Prev Close:	36.51	Day's Range:	36.51 - 36.68
Open:	N/A	52wk Range:	26.19 - 41.85
Bid:	36.60 x 500	Volume:	67,337
Ask:	36.65 x 200	Avg Vol (3m):	26,433,200
1y Target Est:	46.44	Market Cap:	58.04B
Beta:	1.76	P/E (ttm):	15.35
Earnings Date:	Apr 28 - May 2 (Est.)	EPS (ttm):	2.38
		Div & Yield:	1.20 (3.30%)

Trhové dáta

- Niekoľko opcií na túto akciu:

36.50	GM140314C00036500	0.92	↑0.27
36.50	GM140328C00036500	0.99	↑0.01
37.00	GM140307C00037000	0.51	↓0.03
37.00	GM140314C00037000	0.67	↑0.17
37.00	GM140322C00037000	0.73	↑0.15
37.00	GM140328C00037000	0.77	↑0.09

- Koľko by mali tieto opcie stáť podľa Black-Scholesovho modelu?

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Pripomeňme si Black-Scholesov vzorec pre call opciu:

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

kde $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi$ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$ a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Potrebujeme teda nasledujúce hodnoty:
  - S = cena akcie
  - E = expiračná cena
  - $T-t$ = čas zostávajúci do expirácie
  - σ = volatilita akcie
  - r = úroková miera
- V tomto prípade: $S = 36.51$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Uvažujme opciu **GM140322C0037000**
- Expiračná cena: $E = 37$
- Čas zostávajúci do expirácie:

	February					
Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	**21**	22
23	24	25	26	27	28	

	March					
Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

  - expirácia je o 21 pracovných dní
  - čas má byť v modeli zadaný v rokoch, uvažujme 252 pracovýchdní v roku $\rightarrow T - t = 21/252$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Úroková miera (bonds.yahoo.com):

US Treasury Bonds Rates

Maturity	Yield	Yesterday	Last Week	Last Month
3 Month	0.03	0.03	0.03	0.02
6 Month	0.07	0.07	0.05	0.05
2 Year	0.32	0.31	0.32	0.40
3 Year	0.72	0.70	0.67	0.85
5 Year	1.56	1.54	1.53	1.70
10 Year	2.77	2.75	2.72	2.87
30 Year	3.74	3.72	3.69	3.76

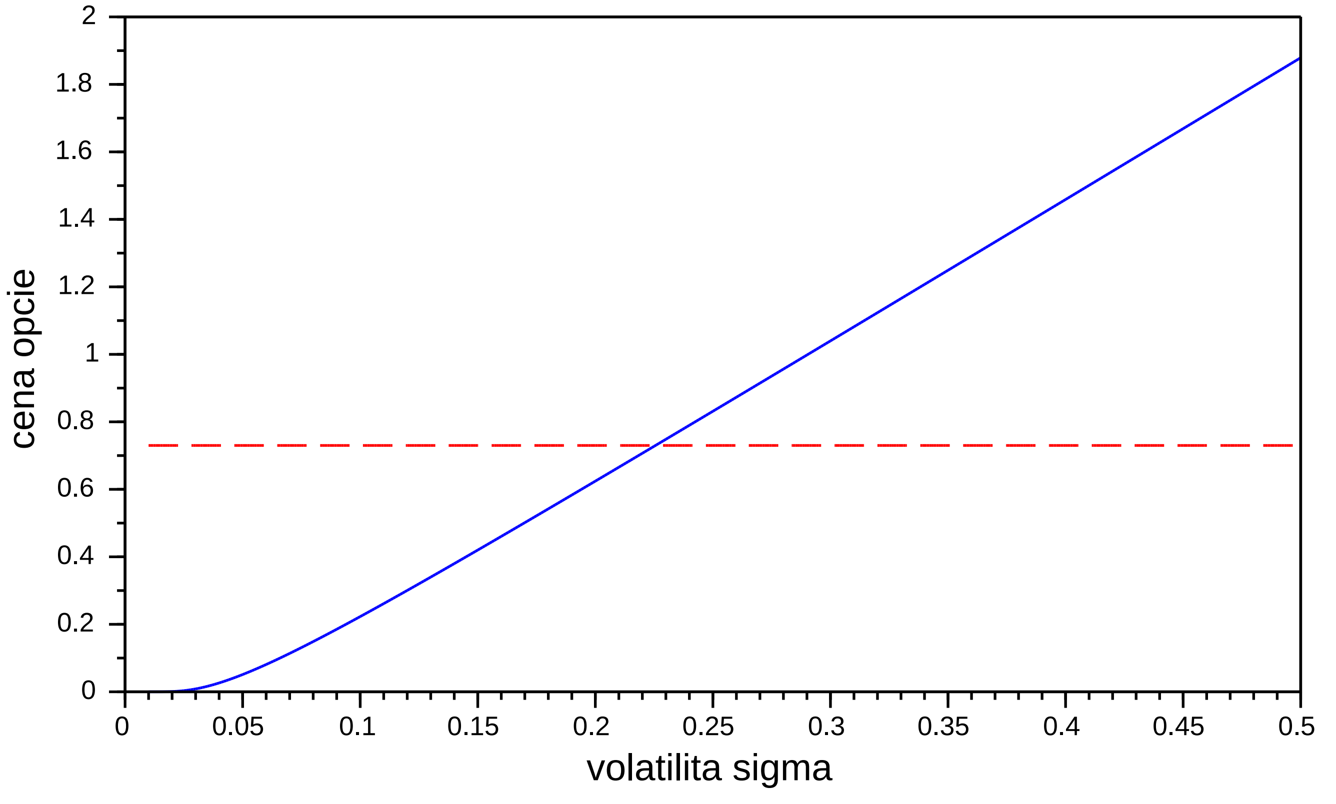
- Dosť štandardnou voľbou sú trojmesačné dlhopisy.
- Úroková miera má byť daná ako desatinné číslo, takže: $r = 0.03/100$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Akú volatilitu máme dosadzovať?
  - Na cvičení: výpočet Black-Scholesovej ceny pri použití historickej volatility
  - Rôzne odhady volatility v závislosti od časového rozsahu dát
  - Cena sa presne nezhoduje s trhovou
- Otázka: Pre akú hodnotu volatility by sa Black- Scholesova cena rovnala reálnej trhovej cene?
- Táto hodnota volatility sa nazýva implikovaná volatilita

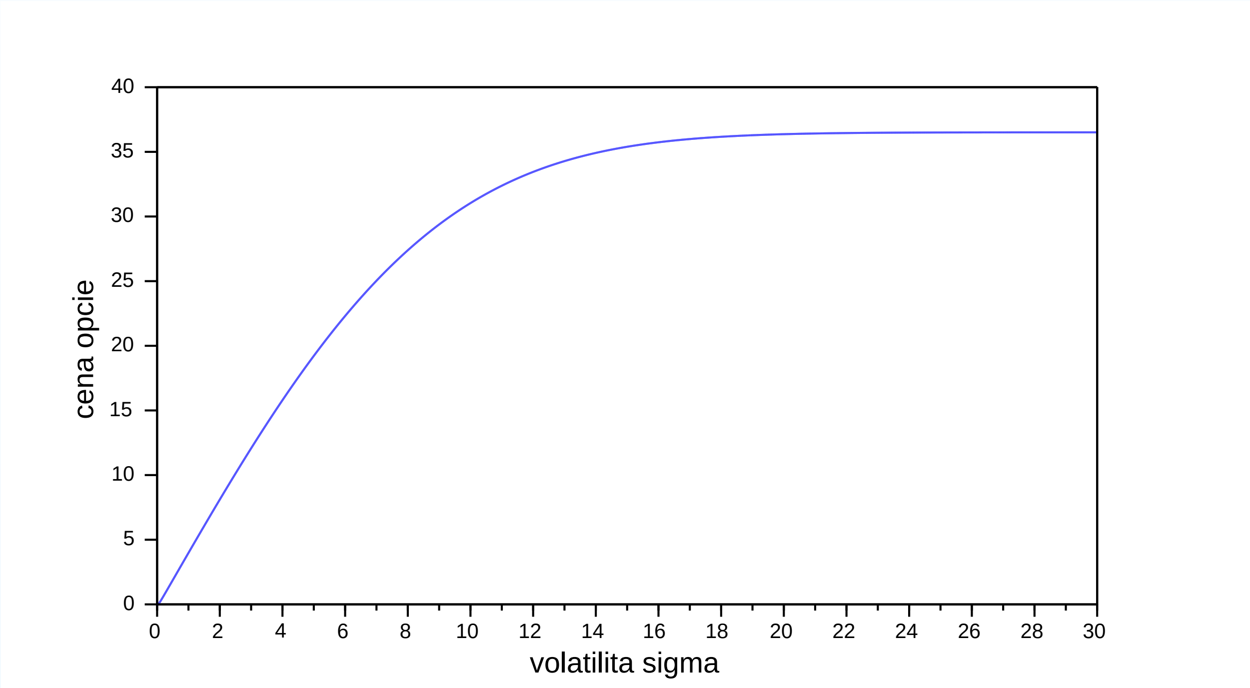
Implikovaná volatilita

- Závislosť ceny opcie od volatility:



Existencia implikovanej volatility

- Ako závisí Black-Scholesova cena tejto opcie od volatility - pre väčší rozsah hodnôt volatility:



Existencia implikovanej volatility

- Vo všeobecnosti ukážeme, že:
  - Cena call opcie je rastúcou funkciou volatility.
  - Existujú limity $V_0 := \lim_{\sigma \to 0^+} V(S,t;\sigma)$, $V_\infty := \lim_{\sigma \to \infty} V(S,t;\sigma)$
- Potom zo spojitosti $V \Rightarrow$ pre každú reálnu cenu opcie z intervalu (V_0, V_∞) existuje implikovaná volatilita a je určená jednoznačne
- Spravíme výpočet pre call opciu na akciu bez dividend
- DÚ: call opcia a put opcia na akciu s dividendami (v učebnici: Veta 4.1)

Existencia implikovanej volatility

- Rastúcosť:
  - Počítame deriváciu (platí $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \sigma} &= SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ &= \left(SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\right)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \\ &\quad + Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

  - Derivácia distribučnej funkcie je funkcia hustoty: $N'(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$
  - Užitočná lema: $SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2) = 0$
  - Takže:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t} > 0$$

Existencia implikovanej volatility

- Limity:
  - Využijeme limitné vlastnosti distribučnej funkcie:

$$\lim_{x\to-\infty} N(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} N(x) = 1$$

  - Z toho:

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma\to 0^+} V(S,t;\sigma) &= \max(0, S - Ee^{-r(T-t)}) \\ \lim_{\sigma\to\infty} V(S,t;\sigma) &= S\end{aligned}$$

Implikovaná volatilita: výpočet

- Ukážka implementácie:

```
function [s]=ImplVolCall(S,E,r,tau,v)
// implikovana volatilita pre call opciu na akciu bez dividend

    // rozdiel medzi teoretickou a trhovou cenou
    function [r]=rozdiel(sigma)
        r=Call(S,E,r,sigma,tau)-v;
    endfunction

    // hladame sigmu, pre ktoru je rozdiel nulovy
    s=fsolve(0.3,rozdiel);
endfunction
```

Implikovaná volatilita: výpočet

- Výpočet:

```
-->ImplVolCall(36.51,37,0.03/100,21/252,0.73)
 ans  =

    0.2255824
```

- Pripomeňme si: