

# *Black-Scholesov model: greeks - analýza citlivosti*

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2012/2013

# Greeks

- Greeks:
  - derivácie ceny opcie podľa jednotlivých parametrov
  - vyjadrujú teda citlivosť ceny opcie na tieto parametre
- Už sme vypočítali  $\frac{\partial V_{call}}{\partial \sigma} = E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \sqrt{T-t}$ , označuje sa  $\Upsilon$  (vega)
- Ostatné:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, P = \frac{\partial V}{\partial r}, \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Pozn.:  $P$  je grécke písmeno ró

- Označenie:  $V^{ec}$  = cena európskeho callu,  $V^{ep}$  = cena európskeho putu; analogicky greeks pre call a put

# Delta

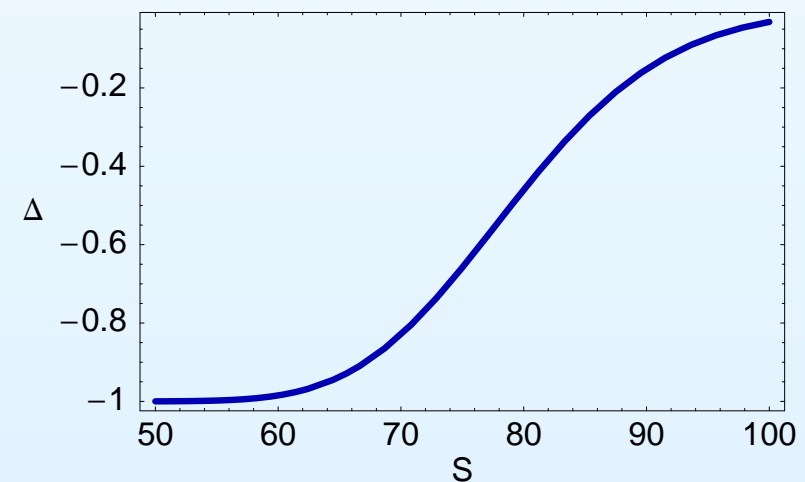
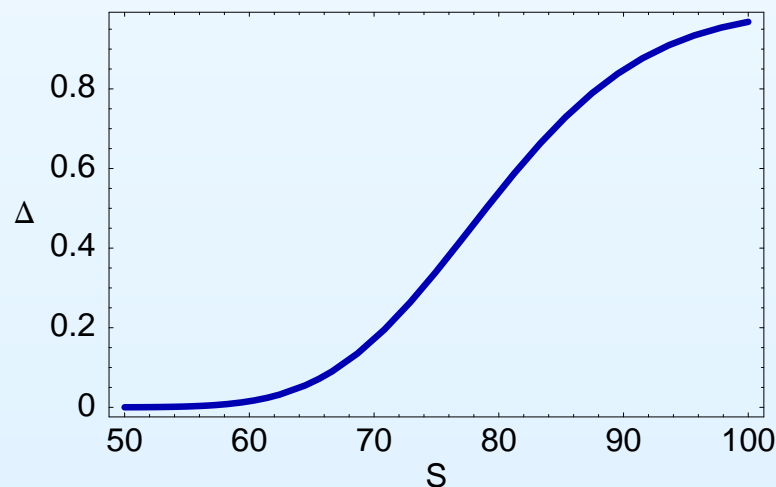
- Výsledok pre call opciu - z Black-Scholesovho vzorca, tá istá lema ako pri volatilitate:

$$\Delta^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S} = N(d_1) \in (0, 1)$$

- Pre put opciu - nemusíme derivovať, stačí použiť put-call paritu:

$$\Delta^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial S} = -N(-d_1) \in (-1, 0)$$

- Ukážka - call vľavo, put vpravo:



## Delta - delta hedging

- Pripomeňme si odvodenie Black-Scholesovho modelu a konštrukciu bezrizikového portfólia:

$$\frac{Q_S}{Q_V} = -\frac{\partial V}{\partial S} = -\Delta$$

kde  $Q_V$ ,  $Q_S$  je počet opcií a počet akcií v portfóliu

- Vytváraniu takéhoto portfólia sa hovorí delta hedging (hedging = zaistovanie proti riziku)

## Delta - ukážka delta hedžingu

- Príklad z reálnych dát - call opcia na akciu IBM, 21.5.2002, dáta v 5-minútových intervaloch
- V čase  $t$ :
  - máme k dispozícii cenu opcie  $V_{real}(t)$  a cenu akcie  $S_{real}(t)$
  - vypočítame implikovanú volatilitu, t. j. riešime rovnicu

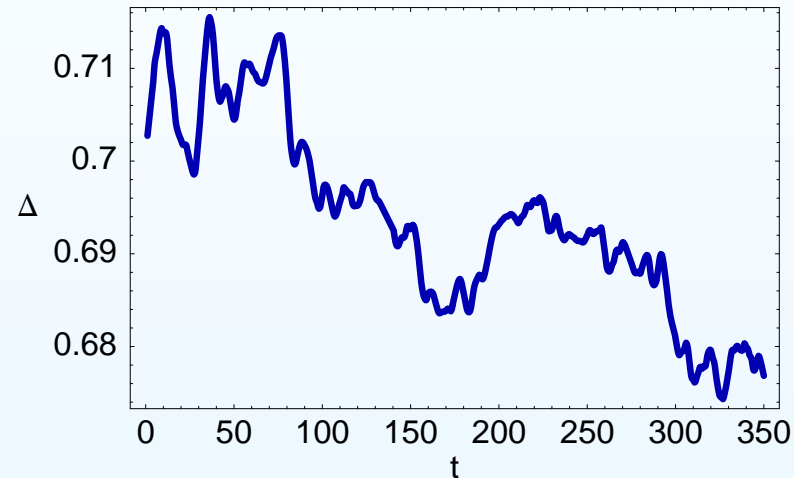
$$V_{real}(t) = V^{ec}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t)).$$

- implikovanú volatilitu  $\sigma_{impl}(t)$  dosadíme do delty call opcie:

$$\Delta^{ec}(t) = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t))$$

# Delta - ukážka delta hedžingu

- Ako sa počas dňa mení delta:



- Ak by sme vypísali jednu opcii, toto by bol počet akcií v našom portfóliu

# Gama

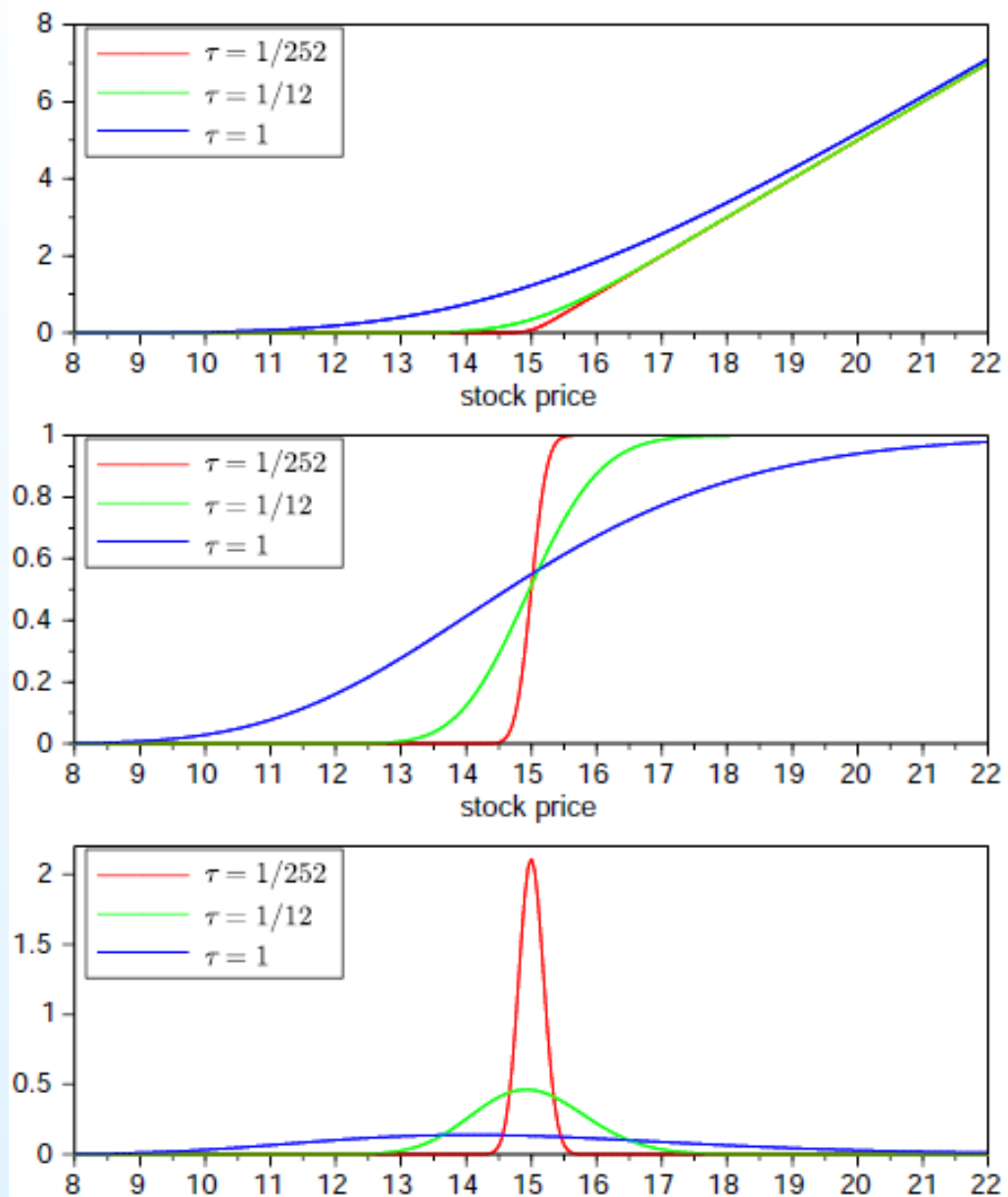
- Výpočet:

$$\Gamma^{ec} = \frac{\partial \Delta^{ec}}{\partial S} = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\exp(-\frac{1}{2}d_1^2)}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}S} > 0$$

$$\Gamma^{ep} = \Gamma^{ec}$$

- Meria citlivost' delty na zmenu ceny akcie

# Cena, delta, gama





# Cena, delta, gama

---

- Súčasne nastáva:
  - cena opcie je "skoro rovná čiara"
  - delta sa veľmi nemení pri malej zmene ceny akcie
  - gama je skoro nulová
- Takisto súčasne:
  - graf ceny opcie má veľkú krivosť
  - delta sa veľmi mení pri malej zmene ceny akcie
  - gama je výrazne nenulová

# Vega, ró, theta

- Vega

- vypočítali sme už:

$$\Upsilon^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial \sigma} = E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \sqrt{T-t} > 0$$

- z put-call parity:  $\Upsilon^{ep} = \Upsilon^{ec}$

- väčšia volatilita  $\Rightarrow$  väčšia pravdep. vysokých ziskov, pritom strata je ohraničená  $\Rightarrow$  kladná vega

- Ró

- call:  $P^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial r} = E(T-t)e^{-r(T-t)} N(d_2) > 0$

- put:  $P^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial r} = -E(T-t)e^{-r(T-t)} N(-d_2) < 0$

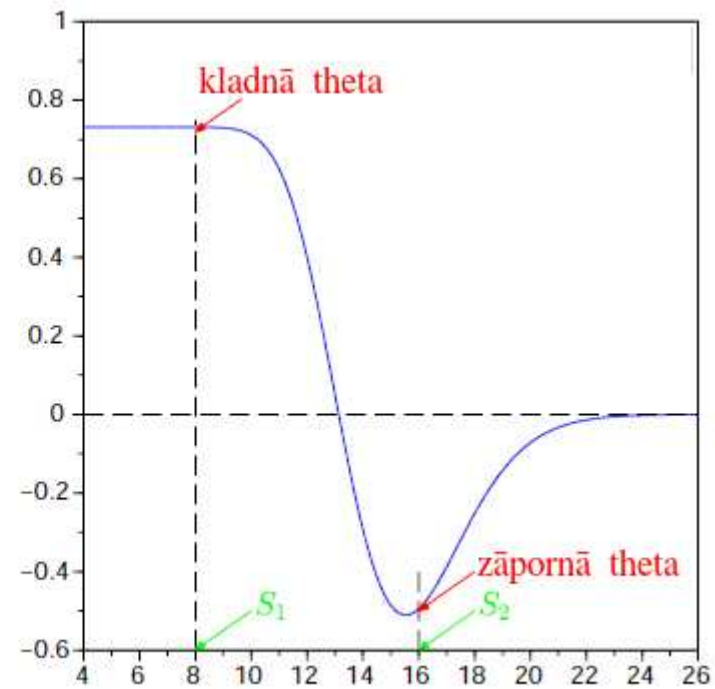
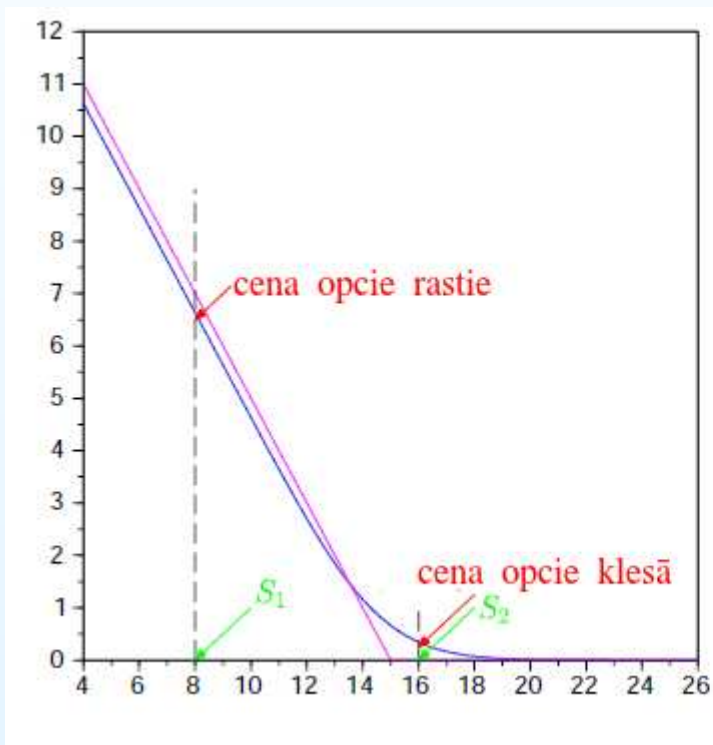
- Theta:

- call: z finančnej mat. vieme, že ak akcia nevypláca dividendy, americkú call opciu sa neoplatí uplatniť skôr  $\Rightarrow$  cena európskej a americkej opcie je rovná  $\Rightarrow$

$$\Theta^{ec} < 0$$

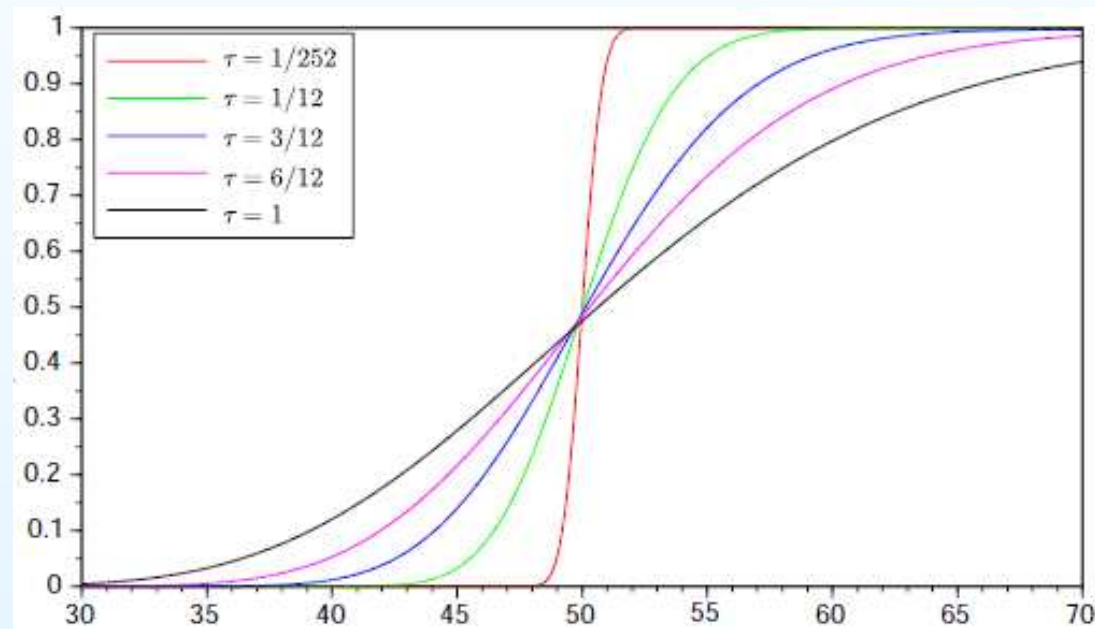
# Vega, rho, theta

- Theta
  - put: nemá jednoznačne určené znamienko:



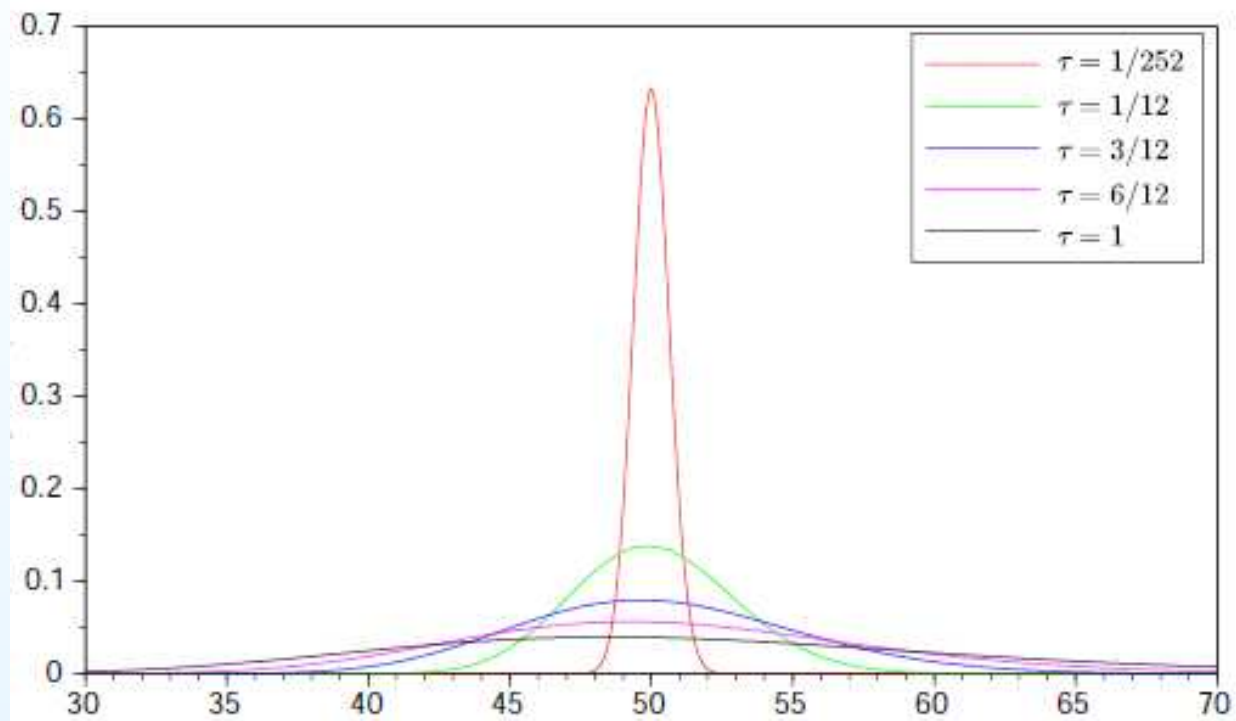
## Cvičenie: "cash-or-nothing" opcia

- "Cash-or-nothing" opcia: vyplatí 1 USD, ak akcia v čase expirácie prekročí hodnotu  $E$ , inak 0.
- Cena opcie:

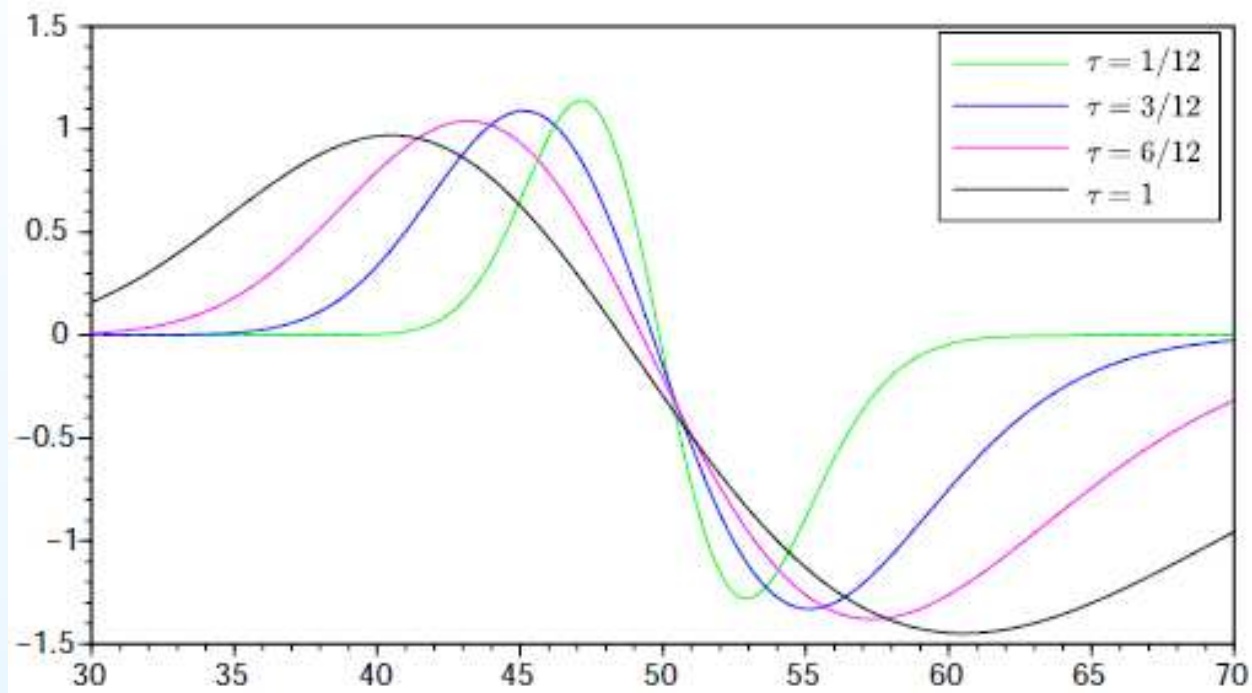


- Na základe interpretácie *greeks* - načrtnite priebeh delty a vegy ako funkcií ceny akcie

## Cvičenie: "cash-or-nothing" delta



## Cvičenie: "cash-or-nothing" vega



## Cvičenie: citlivosť delty na volatilitu

- Espen Haug v článku *Know your weapon*:

One fine day in the dealing room my risk manager asked me to get into his office. He asked me why I had a big outright position in some stock index futures - I was supposed to do "arbitrage trading". That was strange as I believed I was delta neutral: long call options hedged with short index futures. I knew the options I had were far out-of-the-money and that their DdeltaDvol was very high. So I immediately asked what volatility the risk management used to calculate their delta. As expected, the volatility in the risk-management-system was considerable below the market and again was leading to a very low delta for the options. This example is just to illustrate how a feeling of your DdeltaDvol can be useful. If you have a high DdeltaDvol the volatility you use to compute your deltas becomes very important.<sup>(1)</sup>

- Otázky:
  1. Ako závisí delta od volatility použitej pri výpočte?
  2. Prečo nízka volatilita viedla k nízkej delte?
- Viac na cvičení