Lelandov model: odvodenie PDR pre cenu derivátu

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2013/2014

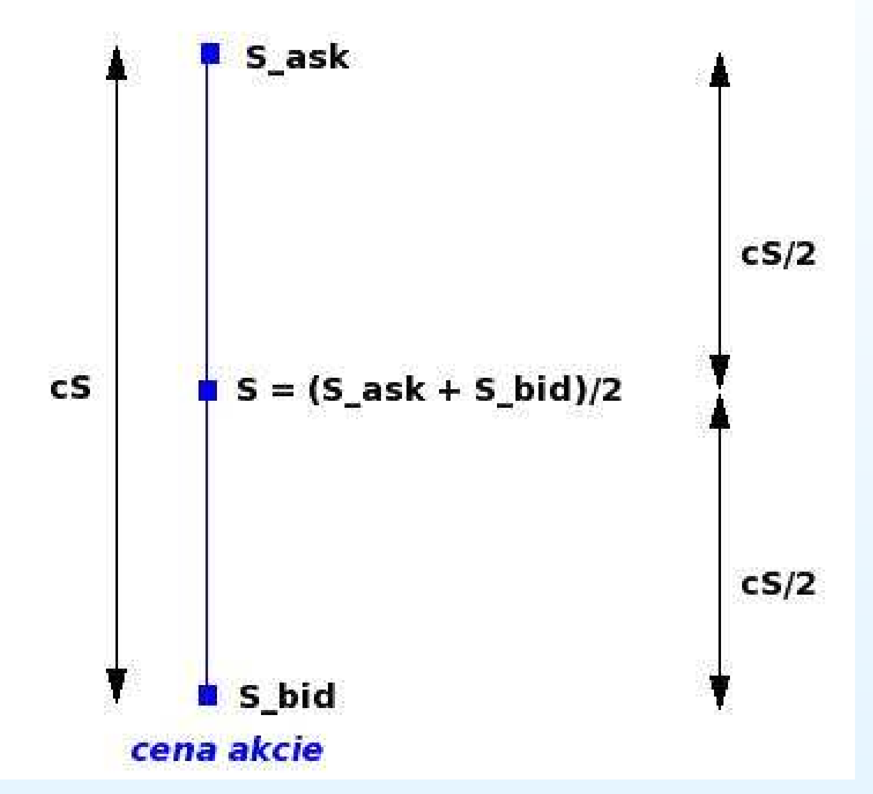
Lelandov model

- Zahrnutie transakčných nákladov do oceňovania opcií
- Pôvodný článok:

  Hayne E. Leland: **Option Pricing and Replication with Transactions Costs**, 1985

Predpoklady modelu

- Transakčné náklady sú charakterizované konštantou $c = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S}$, kde S je priemer bid a ask ceny akcie



- S sa riadi geometrickým Brownovym pohybom
  $dS = \mu S dt + \sigma S dw$

Výpočet konštanty c

Príklad 1:

- Informácie o akcii:

Yahoo! Inc. (YHOO) - NasdaqGS

39.82 ↑0.32(0.81%) 12:09PM EST - Nasdaq Real Time Price

Prev Close:	39.50	Day's Range:	39.50 - 39.98
Open:	39.50	52wk Range:	21.87 - 41.72
Bid:	39.85 x 1700	Volume:	5,105,244
Ask:	39.86 x 1100	Avg Vol (3m):	16,828,600
1y Target Est:	41.16	Market Cap:	40.19B
Beta:	1.12	P/E (ttm):	31.63
Earnings Date:	Apr 14 - Apr 18 (Est.)	EPS (ttm):	1.26
		Div & Yield:	N/A (N/A)

- Z dát: $S_{bid} = 39.85, S_{ask} = 39.86$
- Priemer bid a ask ceny: $S = 39.855$
- $c = \frac{0.01}{39.855} = 2.5028 \times 10^{-4}$

Výpočet konštanty c

PRÍKLAD 2:

- Informácie o akcii:

Microsoft Corporation (MSFT) - NasdaqGS ★ Follow

38.09 ↓ **0.02(0.05%)** 12:12PM EST - Nasdaq Real Time Price

Prev Close:	38.11	Day's Range:	37.89 - 38.18
Open:	38.11	52wk Range:	27.64 - 38.98
Bid:	38.06 x 3900	Volume:	8,045,030
Ask:	38.07 x 6200	Avg Vol (3m):	37,930,700
1y Target Est:	38.60	Market Cap:	316.20B
Beta:	0.71	P/E (ttm):	14.10
Next Earnings Date:	24-Apr-14	EPS (ttm):	2.70
		Div & Yield:	1.12 (2.90%)

- Z dát: $S_{bid} = 38.06, S_{ask} = 38.07$
- Priemer bid a ask ceny: $S = 38.065$
- $c = \frac{0.01}{38.065} = 2.6271 \times 10^{-4}$

Výpočet konštanty c

PRÍKLAD 3:

- Informácie o akcii:

Amazon.com Inc. (AMZN) - NasdaqGS

372.27 ↓ 0.10(0.03%) 12:12PM EST - Nasdaq Real Time Price

Prev Close:	372.37	Day's Range:	368.90 - 375.33
Open:	374.08	52wk Range:	245.75 - 408.06
Bid:	372.81 x 100	Volume:	1,576,414
Ask:	372.94 x 200	Avg Vol (3m):	3,606,330
1y Target Est:	433.05	Market Cap:	170.97B
Beta:	0.77	P/E (ttm):	631.76
Earnings Date:	Apr 21 - Apr 25 (Est.)	EPS (ttm):	0.59
		Div & Yield:	N/A (N/A)

- Z dát: $S_{bid} = 372.81, S_{ask} = 372.94$
- Priemer bid a ask ceny: $S = 372.875$
- $c = \frac{0.13}{372.875} = 3.4864 \times 10^{-4}$

Odvodenie PDR

- Portfólio:
  - jedna opcia a δ akcií, pričom počet akcií určujeme pomocou delta hedžingu, teda $\delta = -\partial V / \partial S$
  - hodnota portfólia: $P = V + \delta S$
  - kvôli transakčným nákladom sa zloženie portfólia nedá meniť spojito $\rightarrow$ meníme ho v intervaloch dĺžky Δt
- Zmena hodnoty portfólia:
  - počet transakcií s akciami je $\Delta\delta$
  - náklady na jednu transakciu sú $cS/2 \Rightarrow$ celkové náklady sú $\frac{cS}{2}|\Delta\delta|$
  - zmena hodnoty portfólia preto je:

$$\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2}|\Delta\delta|$$

Odvodenie PDR

- Máme teda $\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2}|\Delta\delta|$, pričom
  - $\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta w$ z predpokladu o geometrickom Brownovom pohybe
  - $\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta w$ podľa Itóovej lemy
  - zostáva ešte určiť $\Delta\delta$
- Platí $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$, preto $\frac{\partial \delta}{\partial S} = -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, z čoho dostaneme:

$$\Delta\delta \approx \frac{\partial \delta}{\partial S} \Delta S = -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta S$$

- Sem dosadíme ΔS z geometrického Brownovho pohybu

Odvodenie PDR

- Zatiaľ máme:

$$\Delta\delta \approx -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\mu S \Delta t - \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma S \Delta w \qquad (1)$$

- Leland ukázal:
  - vo vzťahu (1) stačí zobrať členy najnižšieho ráu (t.j. zoberieme len $\Delta w \approx (\Delta t)^{1/2}$, a Δt zanedbáme)
  - pri výpočte absolútnej hodnoty sa $|\Delta w|$ dá nahradiť strednou hodnotou $\mathbb{E}[|\Delta w|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}\Delta t}$
- Teda:

$$\begin{aligned}
\Delta\delta &\approx -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma S \Delta w \\
|\Delta\delta| &\approx \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| \sigma S |\Delta w| \approx \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\Delta t}
\end{aligned}$$

Odvodenie PDR

- Dosadíme všetko do zmeny hodnoty portfólia $\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2}|\Delta\delta|$:

$$\Delta P = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{c}{2} S \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \right) \Delta t \quad (2)$$

- Portfólio je bezrizikové $\Rightarrow$ musí platiť $\Delta P = rP\Delta t$
- Portfólio obsahuje jednu opciu a $\delta = -\partial V / \partial S$ akcií $\Rightarrow$ $P = V + \delta S = V - \frac{\partial V}{\partial S}$, a teda

$$\Delta P = r(V - \frac{\partial V}{\partial S} S)\Delta t \quad (3)$$

- Porovnáme (2) a (3):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{c}{2} S \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} = r(V - \frac{\partial V}{\partial S} S)$$

Odvodenie PDR

- Získanú PDR ešte upravíme do výsledného tvaru:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} sign \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

- Rovnica platí pre $S > 0, t \in [0, T]$, pridáva sa k nej koncová podmienka $V(S, T)$ v závislosti od typu derivátu, napr. $V(S, T) = \max(0, S - E)$ pre $S > 0$ v prípade call opcie
- Nelineárna parciálna diferenciálna rovnica kvôli členu obsahujúcemu funkciu signum
- Pre call a put opciu ju však budeme vedieť explicitne vyriešiť

Poznámka ku kombinovaným stratégiám

- Cena kombinovaných stratégií sa už (na rozdiel od Black-Scholesa) nedá vypočítať tak, že oceníme každú opciu zvlášť a výsledok zložíme

MATEMATICKY:

- PDR v Lelandovom modeli nie je lineárna $\Rightarrow$ napr. súčet, rozdiel alebo nejaká iná kombinácia riešení už nie je riešením.

Poznámka ku kombinovaným stratégiám

FINANČNE:

- Ak oceníme každú opciu samostatne, zarátavame tak transakčné náklady vznikajúce z udržiavania každého portfólia zvlášť.
- Ak nemáme transakčné náklady, nevadí, že máme akoby dve portfóliá. Môže sa stať, že v jednom akcie kupujeme a v druhom predávame. Žiadne náklady z toho však nevznikajú.
- V prípade transakčných nákladov to už nie je pravda. Vtedy treba portfólio uvažovať ako celok, a v prípade uvedenej situácie nerobiť zbytočné transakcie.