

Lelandov model: európska call a put opcia

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK, LS 2013/2014

Lelandova PDR - zopakovanie

- Lelandova PDR pre cenu derivátu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

- Rovnica platí pre $S > 0, t \in [0, T]$, pridáva sa k nej koncová podmienka $V(S, T)$ v závislosti od typu derivátu, napr. $V(S, T) = \max(0, S - E)$ pre $S > 0$ v prípade call opcie
- Nelineárna parciálna diferenciálna rovnica kvôli členu obsahujúcemu funkciu signum
- Pripomeňme si, že pre Black-Scholesovu cenu call a put opcie platí $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} > 0$ (kladná gama) $\Rightarrow \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) = 1$

Lelandova PDR - call a put

- Ak do Lelandovej PDR dosadíme Black-Scholesovu cenu callu, resp. putu s upravenou volatilitou $V(S, t; \tilde{\sigma})$:

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]$$

dostaneme:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV =$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

Lelandova PDR - call a put

- To znamená, že Black-Scholesovu cenu callu, resp. putu s upravenou volatilitou $V(S, t; \tilde{\sigma})$:

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]$$

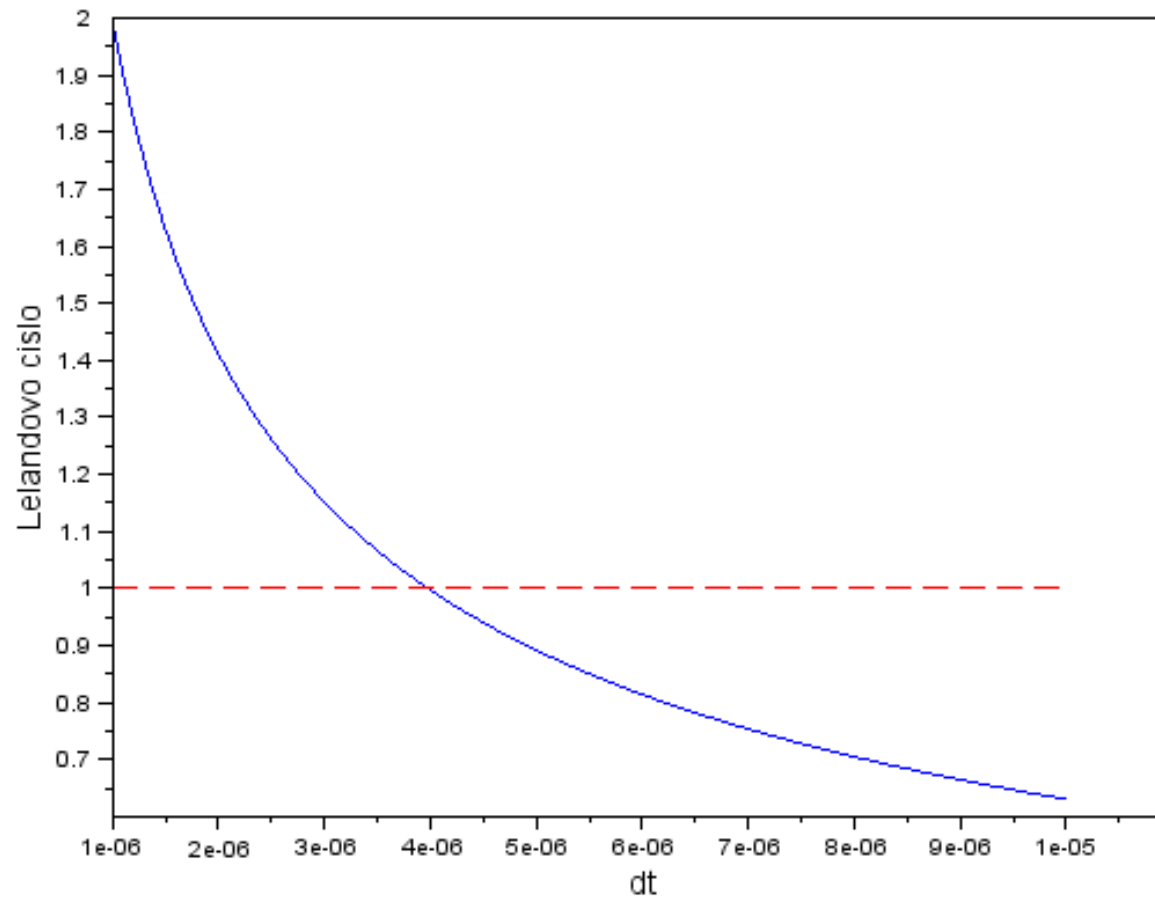
je riešením Lelandovej rovnice pre európsky call, resp. put.

- Výraz pre $\tilde{\sigma}^2$ musí byť kladný \Rightarrow to dáva ohraničenie na prípustné časy Δt - t.j. časy medzi dvomi zaist'ovaniami portfólia (parametre σ, c sú dané):

$$\Delta t > \frac{2}{\pi} \frac{c^2}{\sigma^2}$$

Ohraničenie na prípustné časy Δt

GRAFICKY: závislosť Le od Δt pre $c = 5 \times 10^{-4}$, $\sigma = 0.2$



Ohraničenie na prípustné časy Δt

NUMERICKY: aká je tá hraničná hodnota Δt :

```
-->function [f]=f(dt)
-->    c=5*10^(-4);
-->    sigma=0.2;
-->    le=sqrt(2/%pi)*c/(sigma*sqrt(dt));
-->    f=le-1;
-->endfunction

-->cas=fsolve(4*10^(-6),f);

-->mprintf('%e\n', cas)
3.978874e-006

-->cas*252*7*60
ans =

    0.4211240
```

Uvažujme 252 pracovných dní v roku a burzu otvorenú 7 hodín denne $\Rightarrow \Delta t$ musí byť viac ako cca 0.42 min.

Príklad výpočtu ceny opcie I.

- Zoberme $\Delta t = 5$ minút, teda $\Delta t = 5 / (60 * 7 * 252)$
- Lelandovo číslo je potom prípustné (menšie ako 1):

```
-->dt=5/ (60*7*252) ;  
  
-->le(dt)  
ans  =  
  
0.2902151
```

- Upravená volatilita, ktorá sa bude dosadzovať do Black-Scholesovho vzorca:

```
-->sigmaTC=sqrt( (1-le(dt)) * (sigma^2) )  
sigmaTC  =  
  
0.1684975
```

Príklad výpočtu ceny opcie I.

- Vypočítame cenu call opcie s expiračnou cenou $E = 110$ a expiráciou o $\tau = 1$ rok, ak úroková miera je $r = 1\%$ a cena akcie je $S = 100$
- Pre porovnanie aj cena bez transakčných nákladov:

```
-->Call(100,110,0.01,sigmaTC,0.5)
```

```
ans =
```

```
1.6108991
```

```
-->Call(100,110,0.01,sigma,0.5)
```

```
ans =
```

```
2.3394205
```


Príklad výpočtu ceny opcie II.

- Taká istá opcia pri $\Delta t = 1/252$, t.j. 1 deň:

```
-->dt=1/(252);  
  
-->le(dt)  
ans =  
  
    0.0316651  
  
-->sigmaTC=sqrt((1-le(dt))*(sigma^2))  
sigmaTC =  
  
    0.1968080  
  
-->Call(100,110,0.01,sigmaTC,0.5)  
ans =  
  
    2.2630352
```

Bid a ask ceny opcií v Lelandovom modeli

- Pri odvodení Lelandovej PDR sme mali portfólio: jedna opcia, δ akcií \Rightarrow získaná cena je ponuka na kúpu opcie (teda *bid*)
- Zoberme portfólio mínus jedna opcia, δ akcií \Rightarrow získaná cena je ponuka na predaj opcie (teda *ask*)
- Rovnakým postupom dostaneme, že ask cena spĺňa:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[1 + \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

- Call a put opcia: Black-Scholesova cena s upravenou volatilitou $\sigma_{TC}^2 = (1 + Le)\sigma^2$

Implikované parametre

- Ak máme bid a ask ceny akcie a opcie, vieme vypočítať
 - implikovanú volatilitu
 - implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia(t.j. také hodnoty, pri ktorých sa teoretická bid a ask cena opcie bude rovnať skutočnej)

VSTUPY:

- Akcia - bid a ask cena S_{bid}, S_{ask}
- Opcia - bid a ask cena V_{bid}, V_{ask} , expiračná cena E , čas zostávajúci do expirácie τ
- Ostatné parametre trhu: úroková miera r

Implikované parametre

POSTUP:

- Z bid a ask ceny akcie vypočítame $S = (S_{ask} + S_{bid})/2$ a $c = (S_{ask} - S_{bid})/S$
- Pomocou S, E, r, τ a
 - V_{bid} vypočítame Black-Scholesovu implikovanú volatilitu, to je $\sqrt{(1 - Le)\sigma^2} := \sigma_{bid}$
 - V_{ask} vypočítame Black-Scholesovu implikovanú volatilitu, to je $\sqrt{(1 + Le)\sigma^2} := \sigma_{ask}$
- Riešením sústavy rovníc $(1 - Le)\sigma^2 = \sigma_{bid}^2$, $(1 + Le)\sigma^2 = \sigma_{ask}^2$ vypočítame implikovanú volatilitu σ a Lelandovo číslo Le
- Z definície Lelandovho čísla nakoniec vyjadríme implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia Δt

Implikované parametre - príklad

PRÍKLAD:

- Dáta z 8.3.2014, krátko po otvorení burzy
- Akcia:

General Motors Company (GM) - NYSE ★ Follow

37.65 ↑0.11 (0.29%) 9:44AM EST - Nasdaq Real Time Price

Prev Close:	37.54	Day's Range:	37.54 - 38.01
Open:	N/A	52wk Range:	27.11 - 41.85
Bid:	37.90 x 1000	Volume:	594,013
Ask:	37.94 x 400	Avg Vol (3m):	26,332,800

Implikované parametre - príklad

- Call opcia:

GM Mar 2014 37.000 call (GM140322C00037000) - OPR

1.00 ↑ **0.10 (11.11%)** Mar 6

Prev Close:	0.90	Day's Range:	1.00 - 1.24
Open:	1.24	Contract Range:	N/A - N/A
Bid:	1.20	Volume:	434
Ask:	1.27	Open Interest:	64,168
Strike:	37.00		
Expire Date:	22-Mar-14		

Implikované parametre - príklad

- Úrokové miery:

US Treasury Bonds Rates				
Maturity	Yield	Yesterday	Last Week	Last Month
3 Month	0.04	0.04	0.04	0.04
6 Month	0.07	0.07	0.08	0.04
2 Year	0.37	0.35	0.31	0.32
3 Year	0.77	0.71	0.66	0.65
5 Year	1.64	1.57	1.47	1.49
10 Year	2.81	2.73	2.65	2.67
30 Year	3.74	3.69	3.58	3.65

Implikované parametre - príklad

- Teda máme:

```
Sbid=37.90; Sask=37.94;  
Vbid=1.20; Vask=1.27;  
E=37;  
r=0.04/100;  
  
// dnes 8.3., zaciatok obchodovania  
// expiruje 22.3.  
// -> 11 pracovnych dni  
tau=11/252;  
  
S=(Sask+Sbid)/2;  
c=(Sask-Sbid)/S;
```


Implikované parametre - príklad

- Vypočítame implikované volatility:

```
->sigmaBid=ImplVolCall (S, E, r, tau, Vbid)
sigmaBid =

    0.2039042

->sigmaAsk=ImplVolCall (S, E, r, tau, Vask)
sigmaAsk =

    0.2298972
```

- Poznámky:
 - S je spoločné (nie S_{bid}, S_{ask})
 - implikované volatility z Black-Scholesa

Implikované parametre - príklad

- Riešením sústavy rovníc

$$(1 - Le)\sigma^2 = \sigma_{bid}^2, \quad (1 + Le)\sigma^2 = \sigma_{ask}^2$$

vypočítame Lelandovo číslo Le a implikovanú volatilitu σ :

```
-->Le=(sigmaAsk^2-sigmaBid^2)/(sigmaAsk^2+sigmaBid^2);
```

```
->sigma=sigmaAsk/sqrt(1+Le)
```

```
sigma =
```

```
0.2172898
```

Implikované parametre - príklad

- Z definície Lelandovho čísla vyjadríme implikovaný čas Δt :

```
->dt=(2/%pi)*(c/(sigma*Le))^2;
```

```
->dt*252
```

```
ans =
```

```
0.2651599
```

dt v dňoch

ZÁVER:

- implikovaná volatilita $\sigma_{impl} = 0.217$
- implikovaný čas medzi dvomi zmenami portfólia Δt_{impl} je cca $1/4$ dňa