Stochastický počet II.
Cvičenia z finančných derivátov, LS 2014/2015

1 Wienerov proces

V tejto a nasledujúcich kapitolách označuje w všade Wienerov proces.

1. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie nasledovných náhodných premenných:
   (a) $w(4) - w(2)$
   (b) $w(10) - w(5)$
   (c) $w(10)$
   (d) $w(1) + w(3)$ (pozor, $w(1)$ a $w(3)$ nie sú nezávislé)
   (e) $2w(2) + 4w(4) - 6w(6)$

2. Definujme náhodný proces $B(t) = w(t) - tw(1)$ pre čas t z intervalu $[0, 1]$. Tento proces je známy ako Brownov most, v príkladoch na precvičenie k cvičeniu 2 ste mali vygenerovať realizácie tohoto náhodného procesu.
   (a) Aká je disperzia Brownovho mostu v čase $t = 0$ a $t = 1$? Na túto otázku sa dá odpovedať okamžite, bez výpočtu.
   (b) Odvoďte disperziu Brownovho mostu v čase t. Aký má priebeh? V ktorom čase je maximálna?

3. Definujme proces $x(t) = e^{-t}w(t)^2$. Vypočítajte jeho strednú hodnotu v čase t a načrtnite jej priebeh.

4. Definujme proces $x(t) = \frac{w(t)}{1+t}$. Vypočítajte jeho disperziu v čase t a zistite, v ktorom čase je maximálna.

2 Itóova lema

1. Vypočítajte diferenciál náhodného procesu w^4.

2. Nech x je náhodný proces, ktorý spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu $dx = 3xdt + xdw$. Definujme $y = e^{2t}x^2$. Vypočítajte dy.

3. Nech x je náhodný proces, ktorý spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu $dx = 3xdt + xdw$ Vypočítajte diferenciál náhodného procesu $\ln x$.

4. Vypočítajte diferenciál náhodného procesu t^2e^w.

5. Príklad z minuloročnej skúšky (pochádza z aktuárskych skúšok *Society of Actuaries*[1]) - na obrázku 1. *Standard Brownian motion* tu označuje Wienerov proces - štandardizovaný Brownov pohyb.

You are given:

(i) $$\frac{dS(t)}{S(t)} = 0.3\,dt - \sigma\,dZ(t), \qquad t \geq 0,$$

where $Z(t)$ is a standard Brownian motion and σ is a positive constant.

(ii) There is a real number a such that

$$\frac{d[S(t)]^a}{[S(t)]^a} = -0.66\,dt + 0.6\,dZ(t), \quad t \geq 0.$$

Calculate σ.

(A) 0.16

(B) 0.20

(C) 0.27

(D) 0.60

(E) 1.60

Obr. 1: Príklad z minuloročnej skúšky

3 Ornstein-Uhlenbeckov proces

Ornstein-Uhlenbeckov proces je náhodný proces x daný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dx = \kappa(\theta - x)dt + \sigma dw,$$

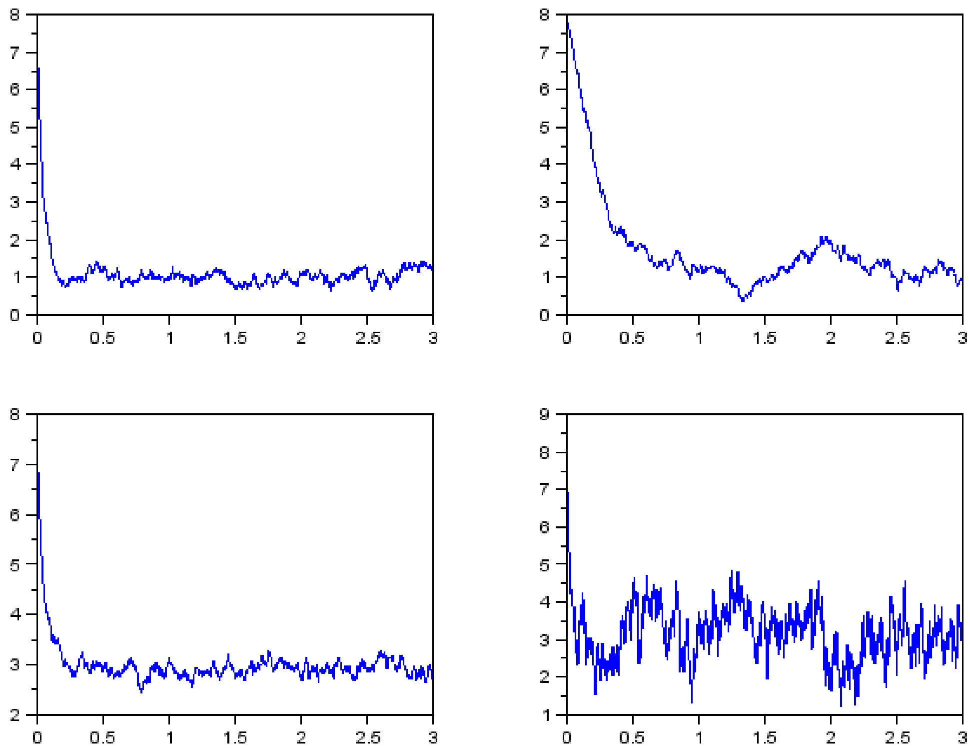
kde $\kappa, \theta, \sigma > 0$ sú parametre. Hodnota v čase $t = 0$ je x_0 (daná konštanta).

1. Odvoďte obyčajnú diferenciálnu rovnicu pre strednú hodnotu procesu v čase t a nájdite jej riešenie. Načrtnite priebeh strednej hodnoty pre rôzne hodnoty parametrov procesu a vysvetlite, prečo sa takýto proces nazýva aj *mean-reverting* proces.

[1] `http://www.soa.org/`

2. Priraďte k simuláciám Ornstein-Uhlenbeckovho procesu na obrázku 2 sady parametrov:

   - $\kappa = 20$, $\theta = 1$, $\sigma = 1$
   - $\kappa = 3$, $\theta = 1$, $\sigma = 1$
   - $\kappa = 20$, $\theta = 3$, $\sigma = 5$
   - $\kappa = 20$, $\theta = 3$, $\sigma = 1$



Obr. 2: Simulácie Ornstein-Uhlenbeckovho procesu

3. V článku *Babbs, S. H., & Nowman, K. B. (1999). Kalman filtering of generalized Vasicek term structure models. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 34(01), 115-130* sa navrhuje model pre úrokovú mieru zobrazený na obrázku 3.

   - Vysvetlite tvrdenie *whose impact dies away exponentially.*
   - Načrtnite vývoj úrokovej miery, ako ju modeluje tento prístup pre zvolenú funkciu $\mu(t)$ a jeden náhodný faktor, t. j. $J = 1$.

4 Ďalšie príklady na precvičenie

1. *Príklad zo skúšky (2013)*: Nájdite riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dx = x dw,\ x(0) = x_0.$$

Návod: Je to špeciálny prípad geometrického Brownovho pohybu.

A possible description of the instantaneous spot interest rate, r, is

$$(1) \qquad r(t) = \mu(t) - \sum_{j=1}^{J} X_j(t),$$

where μ is some deterministic process (i.e., mostly a function of time), and $X_1(t)$, $\ldots, X_J(t)$ represent the current effect of J streams of economic "news" whose impact dies away exponentially,

$$(2) \qquad dX_j = -\xi_j X_j dt + c_j dW_j,$$

where each ξ_j and c_j are deterministic, and $W_1, \ldots, W_j$ are standard Brownian motions with deterministic instantaneous correlation processes, $\rho_{jk} : j, k = 1, \ldots, J$.

Obr. 3: Model pre úrokovú mieru.

2. V článku *Schwartz, E. S. (1997). The stochastic behavior of commodity prices: Implications for valuation and hedging. The Journal of Finance, 52(3), 923-973.* autor navrhuje niekoľko modelov pre ceny komodít, jeden je zobrazený na obrázku 4.

   Pre logaritmus ceny v rovnici (2) sa navrhuje *mean-reverting* Orstein-Uhlenbeckov proces. Odvoďte, ako z toho vyplýva rovnosť (1), ktorá sama osebe nemá takú dobrú interpretáciu.

A. Model 1

To develop the one-factor model we first assume that the commodity spot price follows the stochastic process:[5]

$$dS = \kappa(\mu - \ln S)S dt + \sigma S dz \qquad (1)$$

Defining $X = \ln S$ and applying Ito's Lemma, this implies that the log price can be characterized by an Ornstein–Uhlenbeck stochastic process:

$$dX = \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dz \qquad (2)$$

$$\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa} \qquad (3)$$

The magnitude of the speed of adjustment $\kappa > 0$ measures the degree of mean reversion to the long run mean log price, α. The second term in equation (2) characterizes the volatility of the process, with dz being an increment to a standard Brownian motion.

Obr. 4: Model pre cenu komodity.

3. Použitím substitúcie $x(t) = e^{y(t)}$ nájdite riešenie stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dy = -\frac{1}{2}e^{-2y(t)}dt + e^{-y(t)}dw, \; y(0) = y_0.$$

Návodom je uvedená substitúcia : Odvoďte stochastickú diferenciálnu rovnicu pre x - tá má jednoduchý tvar vieme napísať jej riešenie.

4. *Príklad zo skúšky (2014)*: Banka modeluje výmenný kurz USD/EUR, označme ho C, geometrickým Brownovym pohybom. Všimnime si, že potom $1/C$ je výmenný kurz EUR/USD.

   Pobočka banky v eurozóne potrebuje pre svoje výpočty očakávanú hodnotu výmenného kurzu USD/EUR o rok. Použitím modelu banka dostane výsledok, že je to a USD za 1 EUR. Pobočka v USA zasa pre očakávanú hodnotu výmenného kurzu EUR/USD dostane b EUR za 1 USD. Dokážte, že súčin ab nemôže byť menší ako 1.

5. *Príklad z priebežnej písomky (2014):* Predpokladajme, že cena akcie S sa riadi geometrickým Brownovym pohybom $S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$, kde w je Wienerov proces a $\sigma > 0$. Uvažujme pravdepodobnosť záporného výnosu v čase t ako funkciu času: $p(t) = Prob\left(\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) < 0\right)$. Ukážte, že je možné, aby $\mathbb{E}[S(t)]$ bola rastúcou funciou času t, ale $\lim_{t\to\infty} p(t) = 1$ (t. j. uveďte konkrétne hodnoty μ, σ a dokážte, že pre ne platia uvedené tvrdenia).

6. Nech $dx = \mu x dt + \sigma x dw$. Definujme $y = x^n$, kde n je prirodzené číslo. Dokážte, že stochastická diferenciálna rovnica pre y má tiež tvar $dy = \tilde{\mu} y dt + \tilde{\sigma} y dw$ a určte $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$.

7. Nech $X(t)$ je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice $dx = \mu X dt + \sigma X dw$. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že pre dané t platí $X(2t) > 2X(t)$.

8. (a) Definujte medián náhodnej premennej so spojitým rozdelením a odvoďte medián lognormálneho rozdelenia.

   (b) Predpokladajme, že cena akcie sa riadi geometrickým Brownovym pohybom. Stredná hodnota ceny akcie o rok je 120 USD a jej medián je 115 USD. Aká je pravdepodobnosť, že o rok bude cena akcie väčšia ako 100?