

BLACK-SCHOLESOV MODEL
FINANČNÉ DERIVÁTY, LS 2014/2015

1. (a) Dokážte, že k je payoff nezáporný a ostro kladný na nejakom intervale, tak Black-Scholesova cena je kladná pre každé $S, \tau > 0$. Aká je interpretácia tohto tvrdenia?
(b) Dokážte, že aj V je riešením Black-Scholesovej rovnice, tak aj $S \frac{\partial V}{\partial S}$ je riešením. Využite toto pomocné tvrdenie na dôkaz toho, že ak je payoff diferencovateľnou funkciou, pričom jeho derivácia podľa S je nezáporná a na nejakom intervale ostro kladná, tak derivácia riešenia podľa S je kladná pre každé $S, \tau > 0$. Aká je interpretácia tohto tvrdenia?
(c) Dokážte, že ak je payoff dvakrát diferencovateľnou funkciou, pričom jeho druhá derivácia podľa S je nezáporná a na nejakom intervale ostro kladná, tak druhá derivácia riešenia podľa S je kladná pre každé $S, \tau > 0$. Aká je (geometrická) interpretácia tohto tvrdenia? *Návod: Treba sformulovať a dokázať analogické tvrdenie k pomocnému tvrdeniu z úlohy (b)*
2. Uvažujme call opciu vypísanú investorom, ktorý má iba $\alpha \in (0, 1)$ akcií. To znamená, že ak by payoff call opcie mal byť vyšší ako αS (kde S je cena akcie v čase expirácie), majiteľ opcie dostane iba αS .
 - (a) Načrtnite payoff takejto opcie a napíšte jeho predpis.
 - (b) Dokážte, že cena takejto opcie je menšia ako cena klasickej call opcie s rovnkými parametrami.
 - (c) Vypočítajte Black-Scholesovu cenu takejto opcie.
 - (d) Nakreslite graf ceny ako funkciu aktuálnej ceny akcie. Ukážte, že cena opcie nemusí byť rastúcou funkciou volatility. (*Poznámka: A to napriek tomu, že payoff je rastúcou funkciou ceny akcie v čase expirácie. Monotónna závislosť ceny opcie od volatility totiž súvisí s konvexnosťou ceny derivátu vzhľadom na S*)
 - (e) Na základe predchádzajúceho grafu načrtnite priebeh vegy ako funkciu S . Vegu potom explicitne zrátajte a nakreslite jej graf-
 - (f) Vypočítajte deltu opcie a jej limitu pre $S \rightarrow \infty$ a interpretujte hodnotu tejto limity.
3. *Zdroj: skúšky Society of Actuaries.* Uvažujme call opciu s expiračnou cenou 41.5 a s expiráciou o 3 mesiace. Aktuálna cena akcie je 40 a jej volatilita je 0.3. Delta opcie je 0.5. Vypočítajte cenu opcie.

4. Uvažujme Black-Scholesovu cenu call opcie $V(S, t)$. Dokážte, že pre $S_1 > S_2$ je

$$\frac{V(S_1, t)}{V(S_2, t)} > \frac{S_1}{S_2}.$$

Návod: Pozrite sa na podiel $V(S, t)/S$ ako na funkciu premennej S .