Domáca úloha: individuálne zadania
Finančné deriváty, LS 2014/2015

Pokyny k odovzdávaniu:

- Úlohy sa riešia v dvojiciach (podľa AISu má tento predmet zapísaných 28 študentov, teda bude 14 dvojíc). Každá dvojica rieši jednu zvolenú úlohu z tohto zoznamu, každá inú. Rezervácia úloh (píšte členov dvojice a zvolenú úlohu): `http://users.smartgb.com/g/g.php?a=s&i=g18-79174-d4`
- Termín odovzdania: Ak je skúška v utorok a neskôr, deadline je 24 hodín pred skúškou. Ak je skúška v pondelok, deadline je v piatok o 9.00 hod. Inak povedané, na opravovanie budem mať jeden pracovný deň. Ak členovia dvojice, ktorí spolu vypracovávajú zvolenú úlohu, nejdú na ten istý termín skúšky, termín odovzdania je odvodený od skoršieho termínu.
- Riešenia treba poslať v `pdf` formáte na adresu `beata.ulohy@gmail.com` s predmetom `derivaty 2015 - DU - mená`. Ak bolo súčasťou riešenia nejaké programovanie, text musí obsahovať aj kód, napríklad v prílohe hlavného textu. Riešenie má byť súvislý, dobre čitateľný text, nielen postupnosť výpočtov bez slovného komentáru.
- Ak nie je povedané inak, uvažujeme Black-Scholesov model a akciu, ktorá nevypláca dividendy. Výraz x^+ znamená $\max(0, x)$, w označuje Wienerov proces.

Zadania:

1. **Sharpe ratio** - Sharpeho pomer - derivátu s podkladovým aktívom S je definovaný ako
$$\frac{\text{očakávaný výnos} - \text{bezriziková úroková miera}}{\text{volatilita}} = \frac{\tilde{\mu} - r}{\tilde{\sigma}},$$
ak cena derivátu V spĺňa stochastickú diferenciálnu rovnicu $dV/V = \tilde{\mu}(S,t)dt + \tilde{\sigma}(S,t)dw$ a r je bezriziková úroková miera.

   Uvažujme derivát akcie a jeho oceňovanie v Black-Scholesovom modeli. Dokážte, že Sharpeho pomer derivátu je rovnaký ako Sharpeho pomer akcie, ktorá je podkladovým aktívom pre tento derivát.

   Návod: Použite Itóovu lemu na výpočet diferenciálu dV a využite Black-Scholesovu PDR, ktorú spĺňa cena derivátu.

2. **Chooser option** je opcia, ktorá bude vo vopred stanovenom čase T_1 konvertovaná buď na call opciu alebo put opcu (podľa rozhodnutia majiteľa tejto opcie) s vopred dohodnutým časom expirácie $T_2 > T_1$ a expiračnou cenou K. Uvažujme oceňovanie takejto opcie v Black-Scholesovom modeli.

Na stránke `http://demonstrations.wolfram.com/ChooserOptions/` si pozrite interaktívnu demonštáciu (budete potrebovať prehliadač, je zadarmo dostupný na stiahnutie). Potom vyriešte tieto úlohy:

(a) Odvoďte Black-Scholesovu cenu takejto opcie (čo konkrétne znamená tvrdenie "*It can be shown using general put-call parity considerations...*" na uvedenej stránke?). Výpočet si môžete porovnať napríklad s odvodením, ktoré je na stránke `http://www.haas.berkeley.edu/groups/finance/WP/rpf220.pdf` (str. 56-57), ale vaše odvodenie musí byť podrobnejšie (nestačí preložiť tento text).

(b) Odvoďte deltu a gamu tejto opcie a zobrazte ich grafy ako funkcie ceny akcie pre zvolené hodnoty ostatných parmetrov. Znázornite ich priebeh pre t blížiace sa k T_1.

3. Derivácia vegy opcie podľa volatility sa niekedy označuje ako *Vomma*. Pre call a put opcie sa na `http://en.wikipedia.org/wiki/Greeks_(finance)#Vomma` píše:

> Vomma is positive for options away from the money, and initially increases with distance from the money (but drops off as vega drops off). (Specifically, vomma is positive where the usual d_1 and d_2 terms are of the same sign, which is true when $d_2 < 0$ or $d_1 > 0$.)

(a) Prvú citovanú vetu ilustrujte numericky (jasne vysvetlite, čo je na vašich obrázkoch).

(b) Tvrdenia o podmienkach na kladné znamienko parametra *Vomma* dokážte.

4. Podľa tzv. **Paley-Wienerovej reprezentácie Wienerovho procesu** platí, že ak $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ je postupnosť nezávislých náhodných premenných s rozdelením $\mathcal{N}(0,1)$, tak

$$W(t,\omega) = Z_0(\omega)\frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega)\frac{\sin(nt/2)}{n}, \ t \in [0, 2\pi]$$

je Wienerov proces.

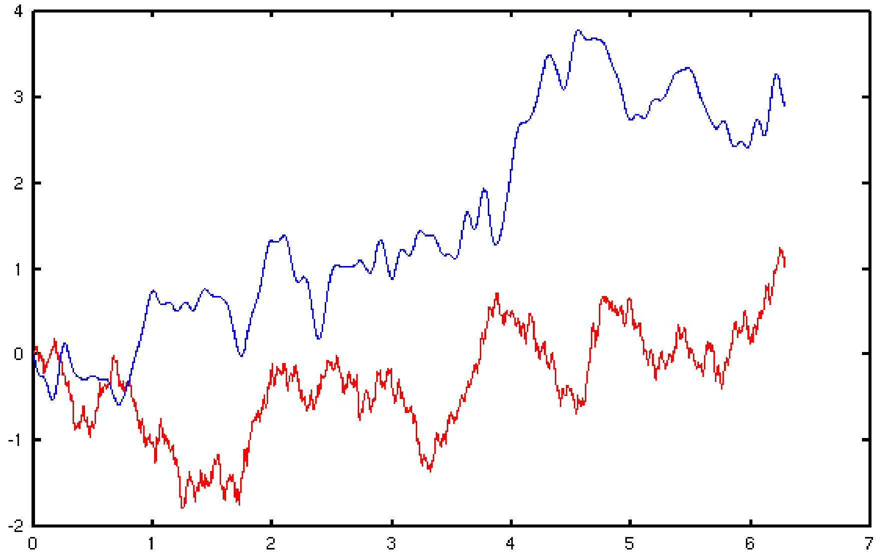
Pri generovaní hodnôt vieme simulovať hodnoty v časoch $t_j = \frac{2\pi j}{N}$ pre $j = 0, 1, \ldots, N$, ak v nekonečnej sume zoberieme prvých M členov:

$$Z_0(\omega)\frac{t_j}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{M} Z_n(\omega)\frac{\sin(nt_j/2)}{n},$$

pričom si treba zvoliť M, N. Príliš malé M má za následok, že získaná trajektória je "príliš hladká", pozri obrázok 1.

(a) Zvoľte si dostatočne veľké M, N a zakreslite do grafu niekoľko trajektórií.

(b) Vygenerujte (napr.) 100 trajektórií. Zvoľte si dva neprekrývajúce sa časové podintervaly intervalu $[0, 2\pi]$ a otestujte nekorelovanosť prírastkov na týchto intervaloch a ich pravdepodobnostné rozdelenie, ktoré by mali mať podľa definície Wienerovho pohybu (normalita s presne danými parametrami).



Obr. 1: Aproximácia Wienerovho procesu pomocou Paley-Wienerovej reprezentácie. Parameter delenia $N = 100$ je spoločný pre obe trajektórie, parameter M je pri modrej trajektórii rovný 100 a pri červenej 1000.

5. Nájdite Black-Scholesovu cenu opcie, ktorej payoff je druhou mocninou payoffu klasickej call opcie, teda $[(S-E)^+]^2$.

6. Nájdite Black-Scholesovu cenu opcie, ktorej payoff je $\left(S + \frac{1}{S}\right)^2$.

7. Bachelier na začiatku 20. storočia modeloval cenu akcie S Brownovym pohybom, teda

$$dS = \mu dt + \sigma dw,$$

   kde $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sú konštanty. Uvažujme Black-Scholesov model s takto zmeneným predpokladom o vývoji ceny akcie. Predpokladajme ďalej, že úroková miera je nulová.

   (a) Odvoďte parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu.

   (b) Nájdite cenu call opcie pri týchto predpokladoch. (Pri riešení PDR si treba uvedomiť, že vzhľadom na predpoklad o Brownovom pohybe pre cenu akcie je $S \in \mathbb{R}$.)

8. Uvažujme Black-Scholesov model. Nech a, K sú kladné konštanty, uvažujme derivát s payoffom $(\min(S-K, a))^+$. Dokážte, že delta tohto derivátu je kladná a v čase $t \in (0, T)$, kde T je čas expirácie, nie je väčšia ako

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{a}{K}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}.$$

9. Uvažujme Black-Scholesov model. Nech $a, b > 0$ sú konštanty. Uvažujme opciu, ktorá vyplatí 1 USD, ak je cena akcie v čase expirácie v intervale (a, b) a inak nevyplatí nič.

   (a) Odvoďte cenu takejto opcie. Nakreslite graf, ktorý má na x-ovej osi cenu akcie a na y-ovej payoff spolu s cenami opcie v niekoľkých zvolených časoch.

(b) Odvoďte cenu akcie (pre všeobecné hodnoty parametrov $a, b > 0$), pri ktorej je cena uvažovanej opcie maximálna.

10. V článku

> Zhang, Jin E., Shoujun Huang, and Tiecheng Li. "The Intersection Between European Put Price And Its Payoff Function." International Journal of Theoretical and Applied Finance 16.04 (2013).

autori študujú cenu akcie, pri ktorej sa graf ceny put opcie pretne s payoffom, pozri obrázok 2. Akcia pritom môže vyplácať spojité dividendy.

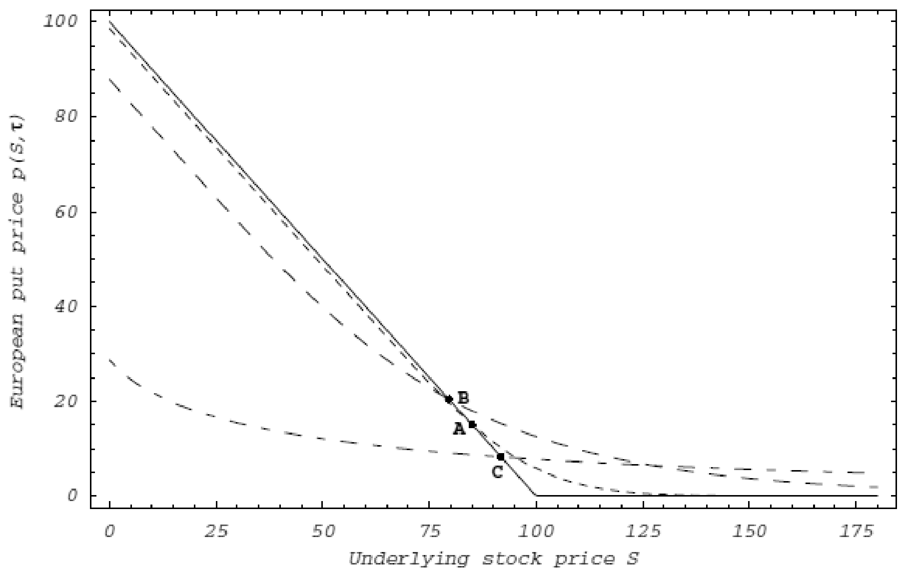


Fig. 1. The intersection between the price of a European put and its payoff function shown as A, B, and C for three different times to maturity. The solid line is the payoff function of the European option, $\max(K - S, 0)$, with $K = 100$. The short dashed line is the price of the European put, $p(S, \tau)$, at time to maturity, $\tau_A = 0.29$. The long dashed line is the option price at $\tau_B = 2.58$. The uneven dashed line is the option price at $\tau_C = 25$. The parameters are $r = 0.05$, $q = 0$ and $\sigma = 0.3$. The horizontal coordinates of the three intersection points are $S_A(\tau) = 85.00$, $S_B(\tau) = 79.55$, and $S_C(\tau) = 91.80$.

Obr. 2: Priesečník ceny put opcie a payoffu.

Najskôr autori počítajú tento priesečník numericky (aby mali s čím porovnávať neskôr odvodené aproximácie). Ukážka je na obrázku 3, kde je zobrazená cena zodpovedajúca priesečníku (y-ová os) ako funkcia času zostávajúceho do expirácie (x-ová os), pričom ostatné parametre opcie sú konštantné.

Zrekonštruujte obrázok 3 na základe vlastných výpočtov. Doplňte tabuľku, ktorá bude obsahovať ceny akcie zodpovedajúce časom $1, 2, 3, \ldots 10$ pre každú z uvedených kriviek.

Návod: Na hľadanie nulového bodu fukcie slúži v Scilabe napr. `fsolve`*, používali sme ju pri výpočte implikovanej volatility.*

11. Vypočítajte koreláciu medzi hodnotami procesu X v časoch t a s, ak X je

(a) geometrický Brownov pohyb $X(t) = x_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$ pre $t \geq 0$, kde $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sú dané konštanty,

(b) Brownov most $X(t) = w(t) - tw(1)$ pre $t \in [0, 1]$.

Pre zvolené hodnoty parametrov a času t nakreslite graf korelácie $X(t)$ a $X(s)$ ako funkciu premennej s (pre $s \geq 0$ v prípade geometrického Brownovho pohybu a pre $s \in [0, 1]$ v prípade Brownovho mostu).

12. (a) Princípom vylúčenia arbitráže dokážte nasledovné ohraničenie pre cenu americkej put opcie:

$$c(S, E, \tau) - S + Ee^{-r\tau} \leq P(S, E, \tau) \leq c(S, E, \tau) - S + E,$$

kde $c(S, E, \tau)$ je cena európskej call opcie s expiračnou cenou E a expiráciou o τ rokov pri aktuálnej cene akcie S a $P(S, E, \tau)$ je cena americkej put opcie s tými istými parametrami.

(b) Ilustrujte tieto ohraničenia graficky na príklade americkej put opcie s expiráciou o štvrť roka, ak je dnešná cena akcie 100 USD, jej volatilita je 0.3 a úroková miera je pol percenta. Uvažujte expiračné ceny z intervalu $(90, 110)$. Na x-ovej osi znázornite tieto expiračné ceny a na y-ovej hranice pre cenu americkej put opcie.

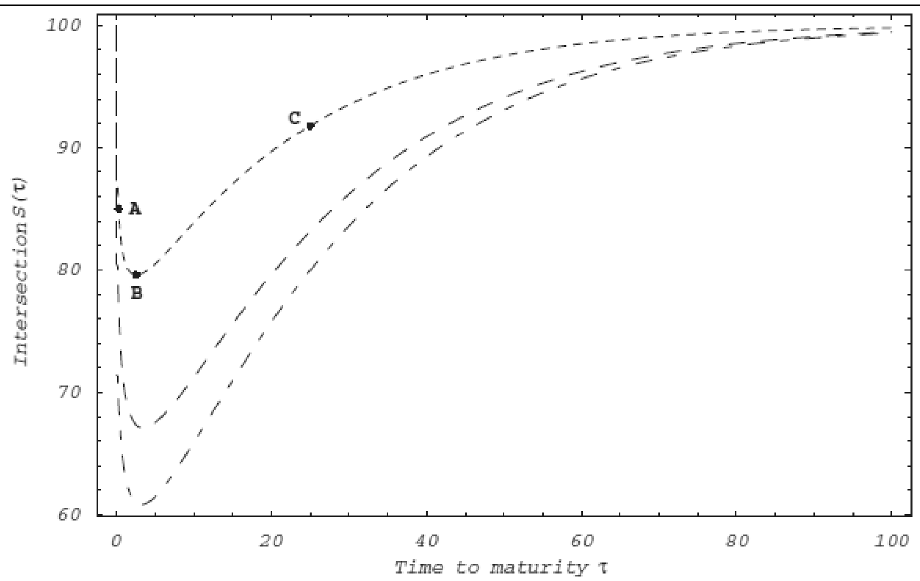


Fig. 2. The intersection, $S(\tau)$, between the price of a European put and its payoff as a function of time to maturity, τ, for $\sigma = 0.3$. The short dashed line starting from $S(0) = K = 100$ is for the case of $0.05 = r > q = 0$. The points $A(0.29, 85.00)$, $B(2.58, 79.55)$ and $C(25, 91.80)$ on the short dashed line correspond to the three intersections in Fig. 1, where $S(\tau)$ reaches the minimum at point B. The long dashed line starting from $S(0) = K = 100$ as well is for the case of $r = q = 0.05$. The uneven dashed line starting from $S(0) = \frac{r}{q}K = 71.4286$ is for the case of $0.05 = r < q = 0.07$.

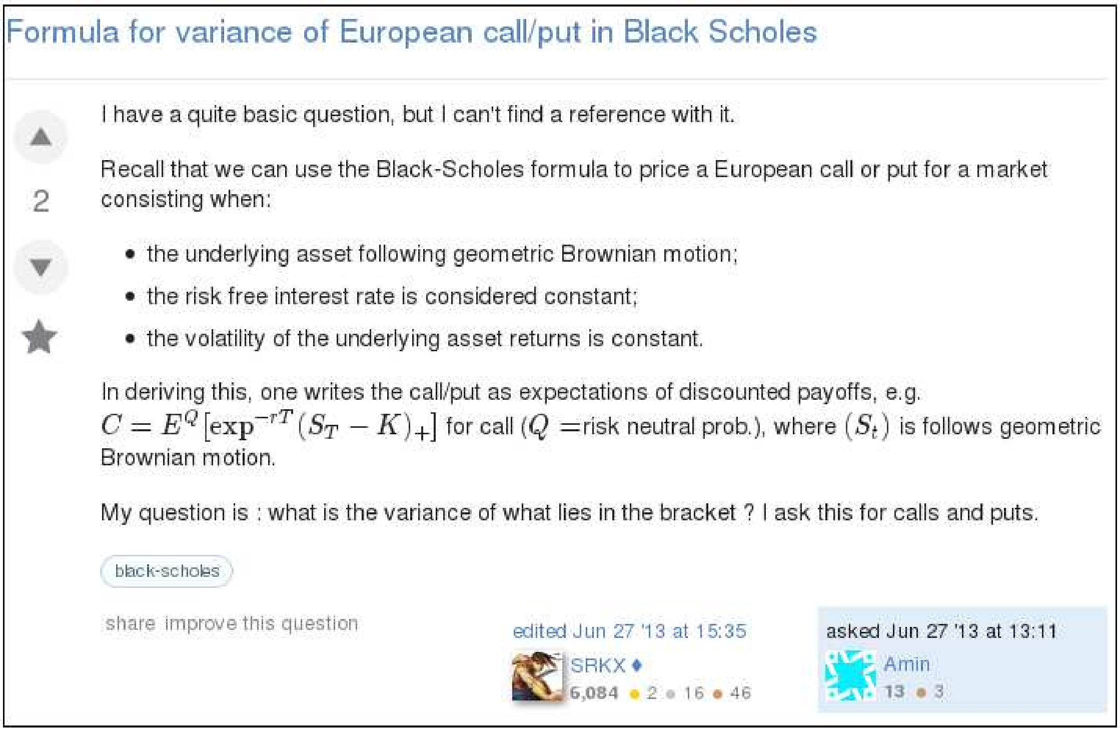
Obr. 3: Priesečník ceny put opcie a payoffu: závislosť ceny akcie zodpovedajúcej priesečníku od času zstávajúceho do expirácie.

13. V tomto príklade neuvažujeme žiadny model pre cenu akcie, takže sa nedajú používať napr. Black-Scholesove ceny.

    Z cvičení vieme, že aj v takomto všobecnom prípade musí byť cena put opcie konvexnou funkciou expiračnej ceny. Dokážte, že musí byť aj konvexnou cenou ceny akcie.

    Návod: Označme $p(S, E)$ cenu put opcie s expiračnou cenou E, ak dnešná cena akcie je S. Keďže cena opcie nemôže závisieť od jednotiek, v ktorých vyjadrujeme cenu, musí platiť $p(hS, hE) = hp(S, E)$ pre $h > 0$. Ceny akcie S_1, S_2 vystupujúce v definícii konvexnosti zapíšte v tvare $S_1 = h_1 E$, $S_2 = h_2 E$ a využite konvexnosť p v premennej E.

14. Na stránke `quant.stackexchange.com` je otázka, ktorej screenshot je na obrázku 4.



Formula for variance of European call/put in Black Scholes

2

I have a quite basic question, but I can't find a reference with it.

Recall that we can use the Black-Scholes formula to price a European call or put for a market consisting when:

- the underlying asset following geometric Brownian motion;
- the risk free interest rate is considered constant;
- the volatility of the underlying asset returns is constant.

In deriving this, one writes the call/put as expectations of discounted payoffs, e.g. $C = E^Q[\exp^{-rT}(S_T - K)_+]$ for call (Q =risk neutral prob.), where (S_t) is follows geometric Brownian motion.

My question is : what is the variance of what lies in the bracket ? I ask this for calls and puts.

black-scholes

share improve this question

edited Jun 27 '13 at 15:35 SRKX 6,084 2 16 46

asked Jun 27 '13 at 13:11 Amin 13 3

Obr. 4: Zadanie otázky.

Upresnime jej znenie: Cena akcie sa riadi geometrickým Brownovym pohybom

$$dS = rSdt + \sigma Sdw$$

(keďže uvažujeme rizikovo-neutrálnu mieru, drift je rovný bezrizikovej úrokovej miere). Definujme

$$X_t = e^{-rT}(S_t - K)^+.$$

Dnešný čas je $t = 0$, teda je známa hodnota S_0. Vypočítajte varianciu procesu X v čase T.

Návod: Na stránke s otázkou je ako odpoveď návod k výpočtu:
`http://quant.stackexchange.com/questions/8346/formula-for-variance-of-`

`european-call-put-in-black-scholes?rq=1` *Výraz označený ako S_T je však X_T, čo zistíte po vyjadrení riešenia stochatickej diferenciálnej rovnice pre cenu akcie. Výsledok uveďte pre všeobecné S_0.*

15. Uvažujme cash-or-nothing opciu, ktorá v čase expirácie vyplatí 1 USD, ak je cena akcie väčšia ako expiračná cena E, inak nevyplatí nič. Predpokadajme, že chceme z trhových dát vypočítať implikovanú volatilitu.

    (a) Aký interval hodnôt môže nadobúdať cena opcie, ak meníme parameter σ a ostatné parametre zostávajú konštantné?

    (b) Je pre prípustnú cenu opcie (v zmysle dosiahnuteľných hodnôt podľa predchádzajúceho bodu) implikovaná volatilita určená jednoznačne?

    Matematické dôkazy doplňte ilustračnými grafmi pre zvolené hodnoty parametrov.