II. Stochastické procesy

Beáta Stehlíková
Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Stochastické procesy vo financiách: motivácia

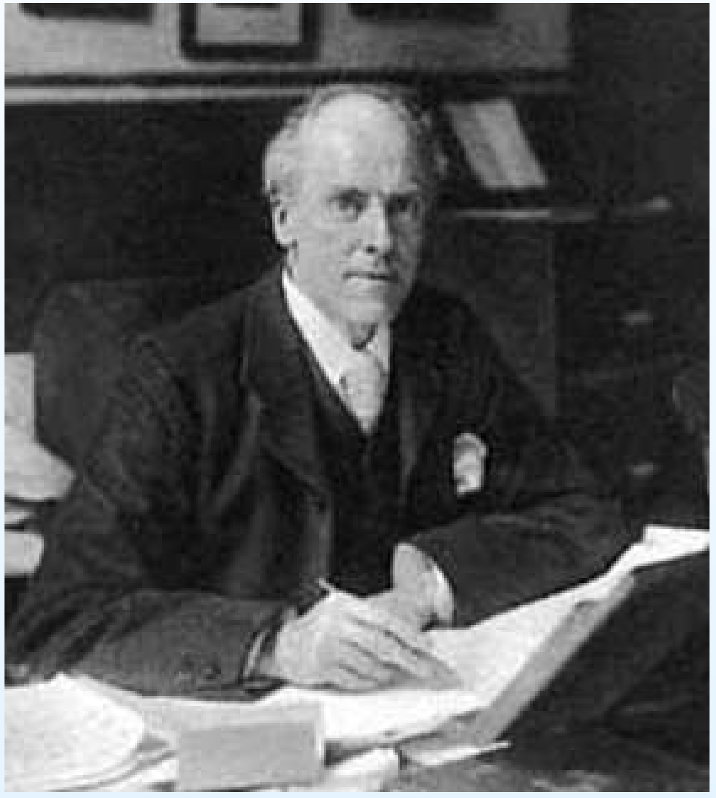
- Ceny akcií - je jasné, že ich vývoj nie je deterministický, na modelovanie potrebujeme stochastické procesy:

http://finance.google.com

- Stochastický proces: t-parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, I - interval alebo diskrétna množina
- To znamená: v čase t je hodnota procesu $X(t)$ náhodná premenná

Náhodná prechádzka

- **Karl Pearson**, 1905: modelovanie migrácie komárov



http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Pearson.html

V *Nature*, 27. 7. 1905, píše:

A man starts from a point O and walks l yards in a straight line, he then turns though any angle whatever and walks another l yards in a second straight line. He repeats the process n times. I require the probability that after these n steps he is a distance between r and $r + \delta r$ from his origin O.

Náhodná prechádzka

- Odpovedal **Lord Rayleigh** (John William Strutt) - odkaz na jeho článok z r. 1880 zaoberajúci sa vibráciami zvuku
- Odpoveď, pre veľké n (počet krokov), je výraz vychádzajúci z normálneho rozdelenia

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rayleigh.html

Náhodná prechádzka

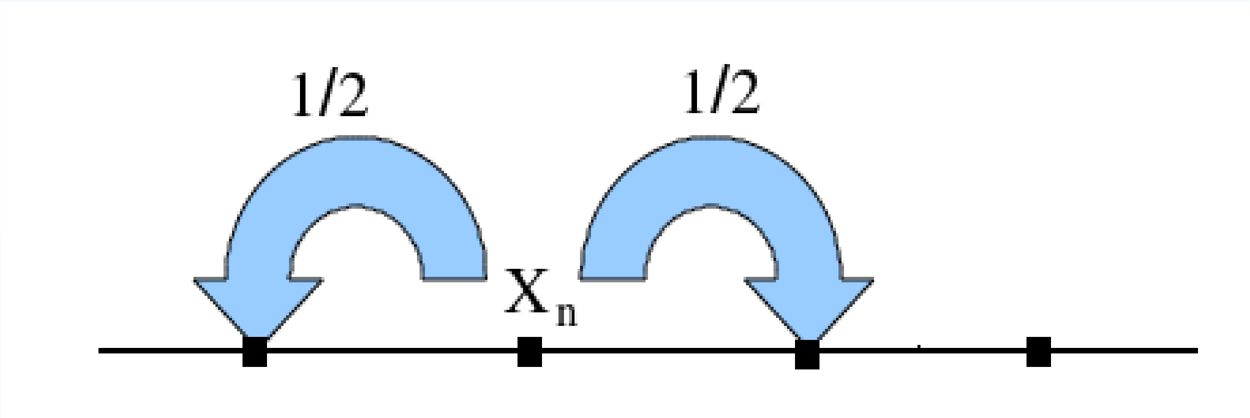
- Pearson komentoval v *Nature*:

  > *The lesson of Lord Rayleigh's solution is that in open country the most probable place of finding a drunken man who is at all capable of keeping on his feet is somewhere near his starting point.*

- PLÁN NA NASLEDUJÚCU ČASŤ PREDNÁŠKY:
  - Príklad náhodnej prechádzky, známy ako problém opitého námorníka
  - Budeme ho študovať v jednorozmernom prípade
  - Potom spravíme limitu $\rightarrow$ spojitý prístup ("náhodný let")
  - Dostaneme sa k Wienerovmu procesu

Problém opitého námorníka

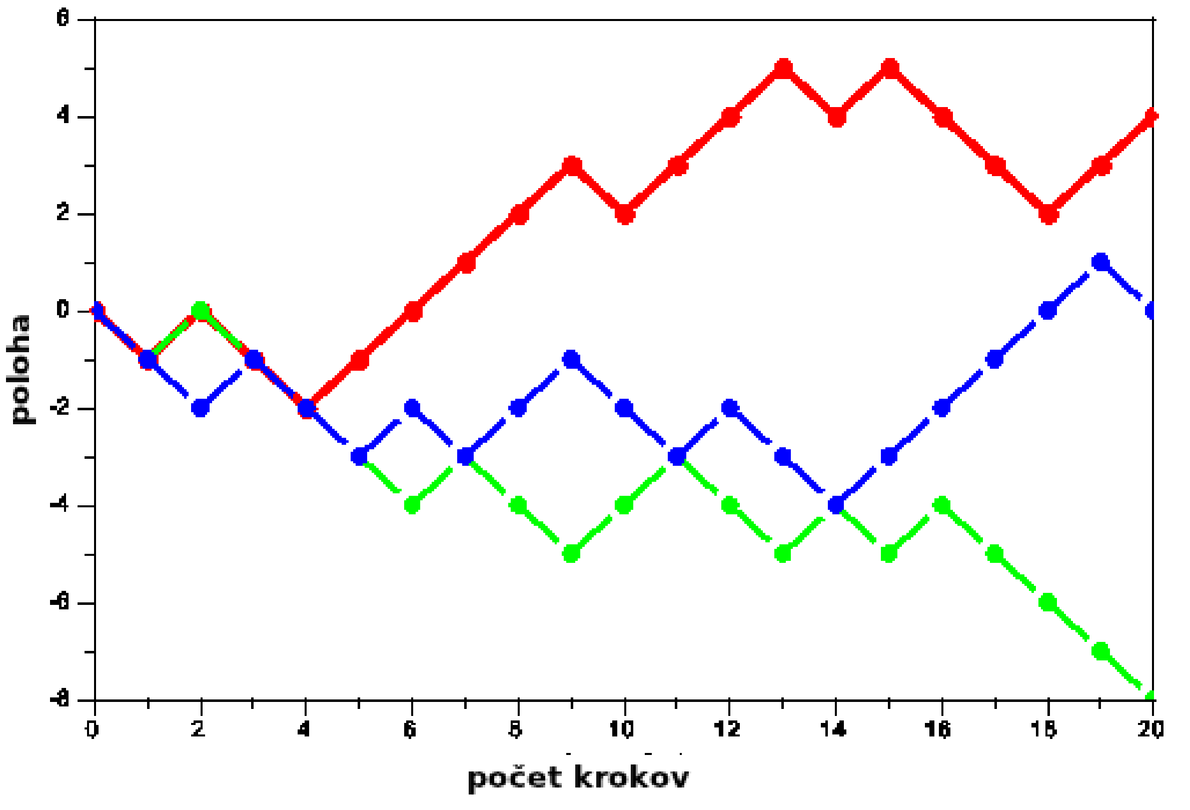
- Námorník sa pohybuje po priamke, začína v $x_0 = 0$
- S pravdepodobnosťou $1/2$ spraví krok dopredu, s pravdepodobnosťou $1/2$ spraví krok dozadu
- Označme X_n jeho polohu po n krokoch



- i-ty krok: $s_i = \pm 1$, každá hodnota s pravdepoodobnosťou $1/2$; kroky sú nezávislé
- Poloha po n-tom kroku: $X_n = \sum_{i=1}^{n} s_i$

Problém opitého námorníka

- Ukážka trajektórií:



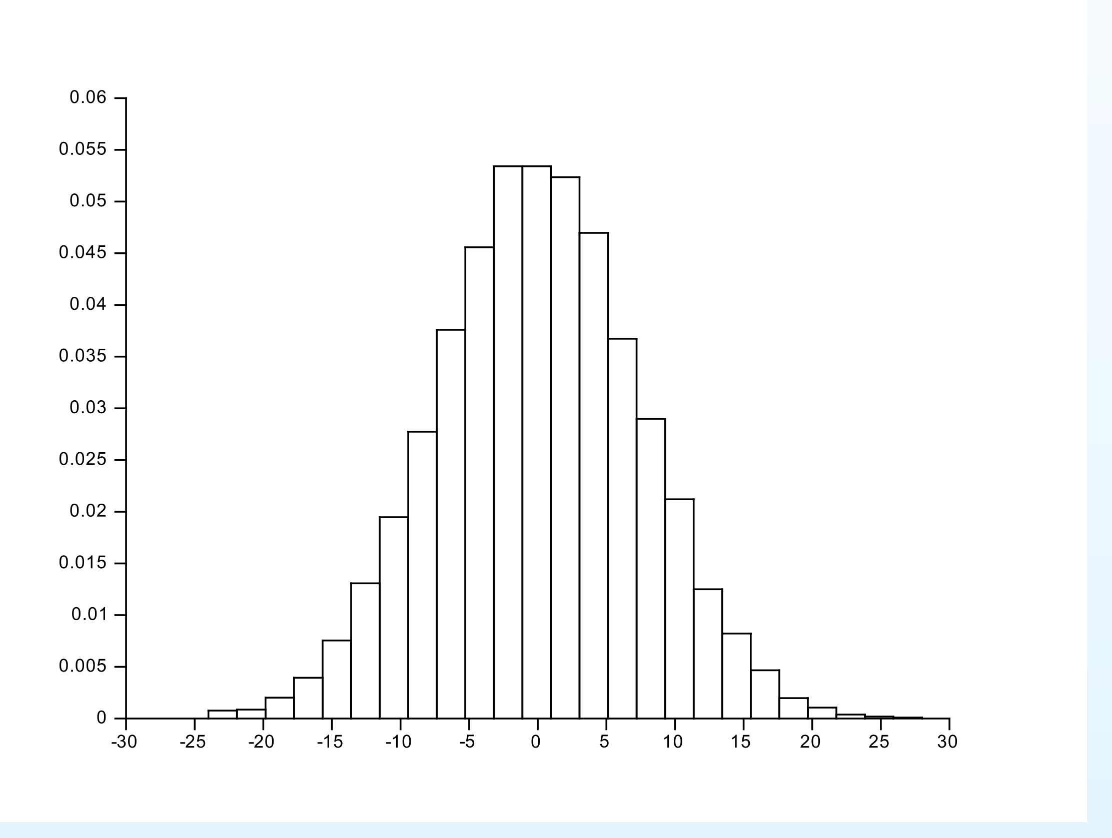
Problém opitého námorníka

- Odvodíme rozdelenie X_n
- Máme:
  - i-tý krok: $s_i = \pm 1$, každá hodnota s pravdepodobnosťou $1/2 \Rightarrow \mathbb{E}[s_i] = 0$, $\mathbb{D}[s_i] = 1$
  - nezávislé prírastky
- Teda pre X_n dostaneme
  - strednú hodnotu:
  $$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} s_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[s_i] = 0$$
  - a - využitím nezávislosti krokov - disperziu:
  $$\mathbb{D}[X_n] = \mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^{n} s_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}[s_i] = n$$
- Z centrálnej limitnej vety: pre veľké n je rozdelenie blízke normálnemu

Problém opitého námorníka

PRÍKLAD:

- Poloha po 50 krokoch - histogram:



- Naše predchádzajúce výpočty: rozdelenie by malo byť blízke $N(0, 50)$ - zhoduje sa so simuláciami

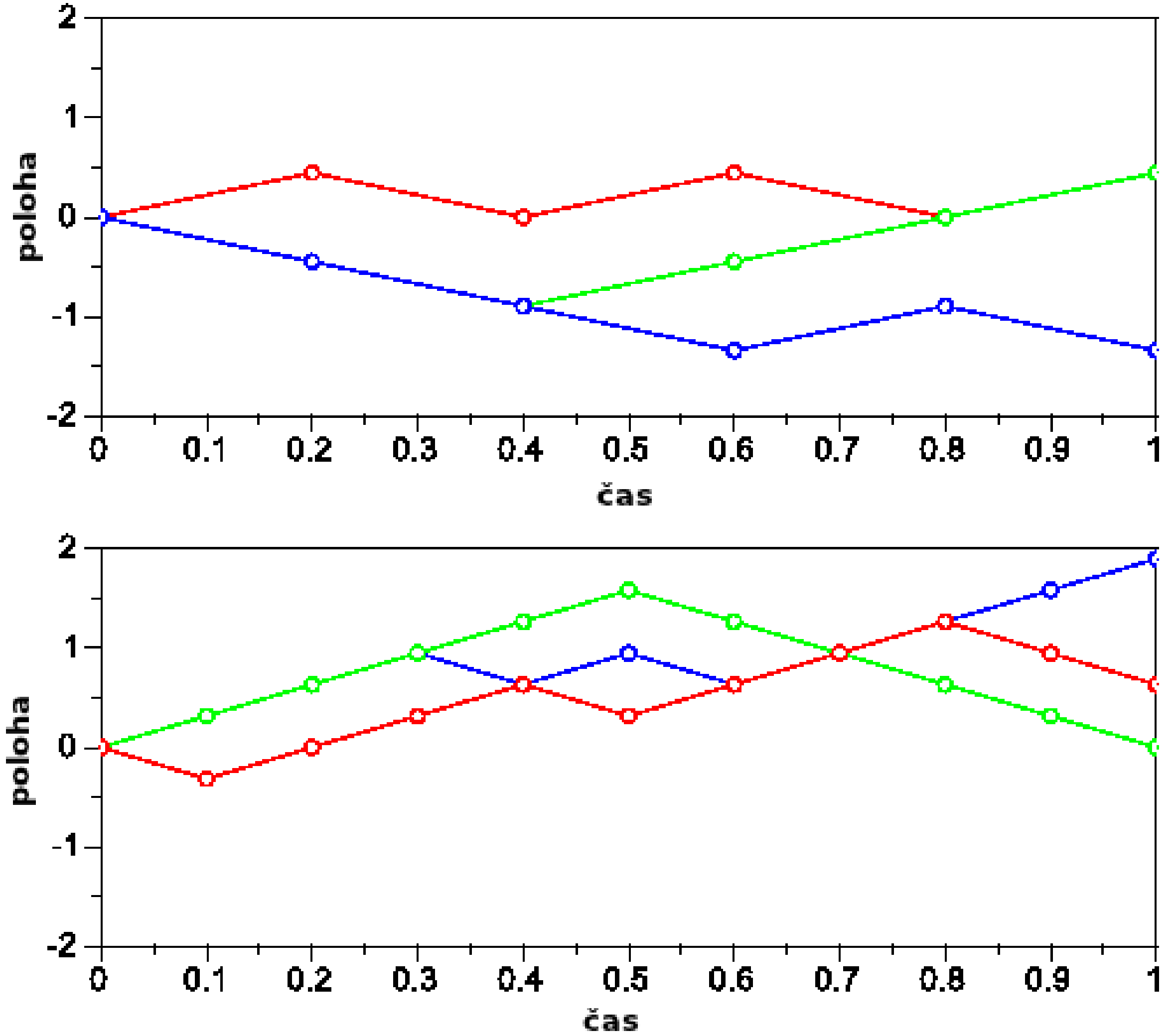
Problém opitého námorníka

INTUITÍVNY PRÍSTUP K LIMITE:

- Kratší časový interval medzi krokmi:
  - teraz je to jednotka času
  - nech je to $1/k$ (teda k krokov za jednotku času)
- Aby sa zachovalo rozdelenie, preškálujeme dĺžku kroku:
  - krok dĺžky $s_i = \pm\ell$, každá hodnota s pravdepodobnosťou $1/2$
    $\Rightarrow$ stredná hodnota je 0 a disperzia ℓ^2
  - v čase n je poloha námorníka $\sum_{i=1}^{nk} s_i$
    $\Rightarrow$ stredná hodnota je 0 a disperzia $nk\ell^2$
  - aby zostala disperzia v čase n rovná n, potrebujeme krok dĺžky $\ell = 1/\sqrt{k}$
- Chceli by sme spraviť limitu pre $k \to \infty$

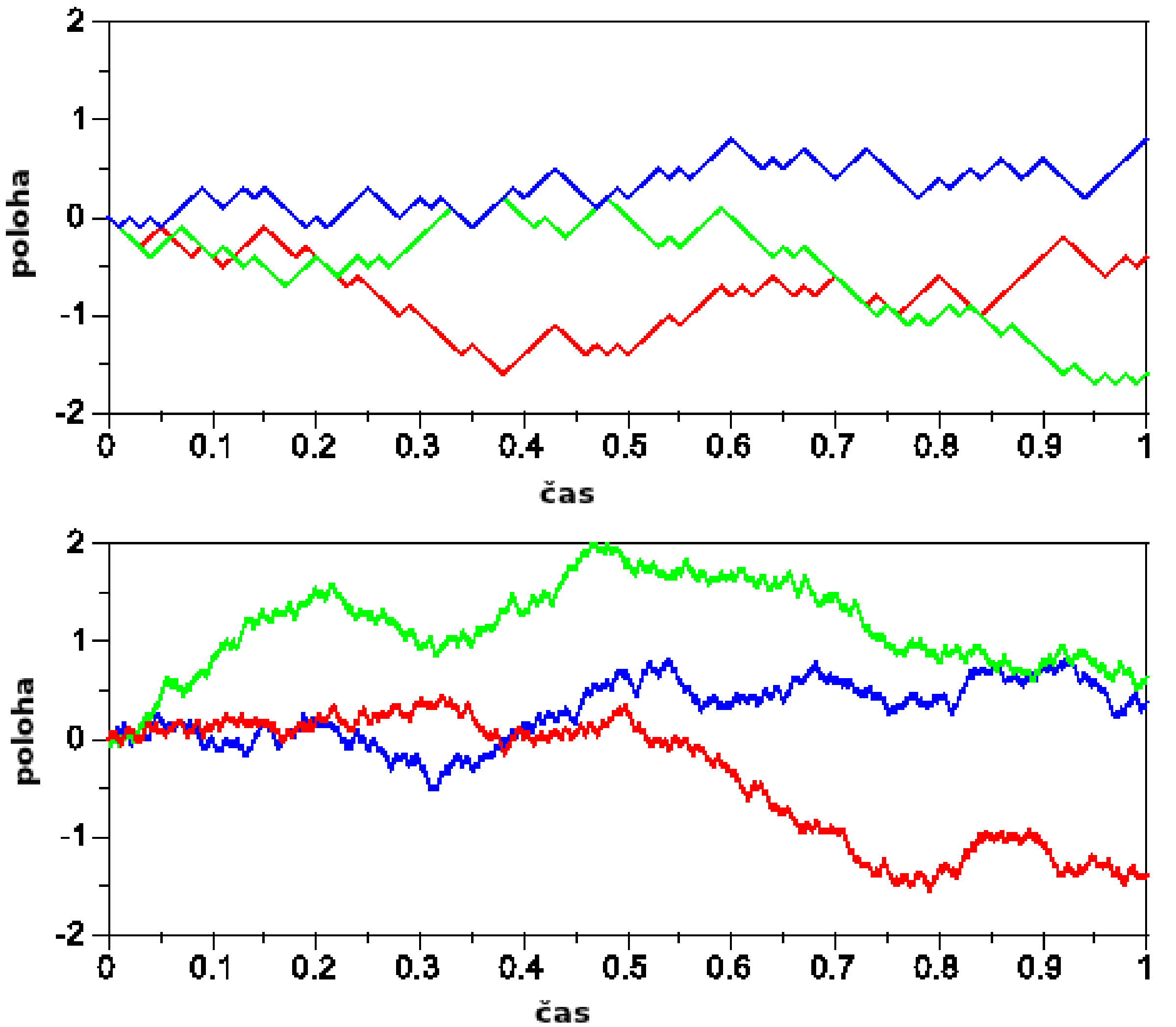
Problém opitého námorníka

- PRÍKLAD: 5 a 10 krokov za jednotku času:



Problém opitého námorníka

- PRÍKLAD: 100 a 1000 krokov za jednotku času:



Problém opitého námorníka

INTUITÍVNE OČAKÁVANIA O LIMITE:

- Rozdelenie prírastku na intervale $[t, t + \Delta t]$ je limitou nasledovných situácií:

  spravíme $k\Delta t$ krokov a každý krok má dĺžku $\ell = 1/\sqrt{k}$

  kde prírastok má
  - strednú hodnotu 0
  - disperziu $k\Delta t\,\mathbb{D}[\ell] = \Delta t$
  - približne normálne rozdelenie
- V limite sa dá čakať presne normálne rozdelenie $\mathcal{N}(0, \Delta t)$
- Prírastky na neprekrývajúcich sa časových intervaloch sú nezávislé

Wienerov proces: definícia

- Wienerov proces $\{w(t), t \geq 0\}$ je náhodný proces, ktorý spĺňa:

  i) $w(0) = 0$

  ii) prírastky $w(t + \Delta t) - w(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou 0 a disperziou Δt

  iii) pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n$ sú prírastky

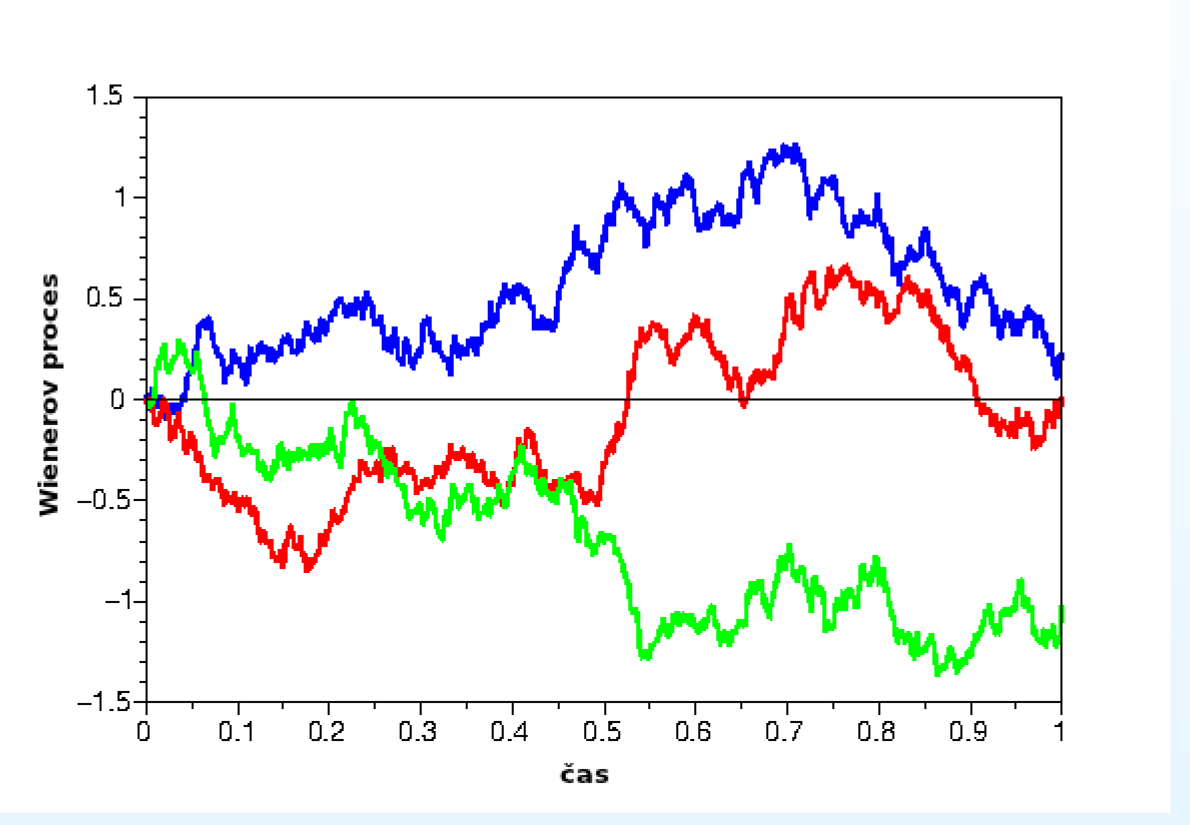
  $$w(t_1) - w(t_0), w(t_2) - w(t_1), \ldots, w(t_n) - w(t_{n-1})$$

  nezávislé

  iv) trajektórie sú spojité

Wienerov proces - príklad

- Trajektórie Wienerovho procesu



- Rozdelenie Wienerovho procesu v čase t :

$$w(t) = w(t) - w(0) \sim N(0, t)$$

Wienerov proces - poznámka k disperzii

OTÁZKA:
Musí byť disperzia prírastkov $w(t+\Delta t) - w(t)$ rovná Δt , alebo by to mohlo byť napr. aj $\Delta^2, \sqrt{\Delta}, \ldots$?

- K disperzii Δt sme sa dostali uvažovaním (intuitívnej) limity určitej náhodnej prechádzky
- Je možné dostať sa k inej disperzii uvažovaním iného diskrétneho procesu?
- Dá sa definovať iný náhodný proces tak, že budeme požadovať inú disperziu v bode ii) definície?

Wienerov proces - poznámka k disperzii

- Nech $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$ je delenie $[0, t]$. Potom:

(1) $$w(t) - w(0) = \sum_{i=1}^{n} w(t_i) - w(t_{i-1}).$$

- Z nezávislosti prírastkov (disperzia súčtu nezávislých náhodných premenných je súčet ich disperzií):

$$\mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^{n} w(t_i) - w(t_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}[w(t_i) - w(t_{i-1})]$$

- Disperzie na ľavej a pravej strane (1) sa musia rovnať:

$$\mathbb{D}\left[w(t) - w(0)\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{D}[w(t_i) - w(t_{i-1})]$$

  - toto platí, ak $\mathbb{D}[w(t + \Delta) - w(t)]$ je násobok Δ, znormujeme na Δ

Wienerov proces - poznámka k disperzii

- Označme $f(x) = \mathbb{D}[w(t+x) - w(t)]$; potom máme podmienku

$$(2) \qquad f(x_1 + x_2 + \dots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots f(x_n)$$

- Ak navyše požadujeme, aby funkcia f bola spojitá alebo rastúca (obe vlastnosti sú v tomto kontexte prirodzené), tak

$$f(x) = cx,$$

kde c je konštanta, je jediné riešenie

- DOMÁCA ÚLOHA:
Dokážte toto tvrdenie.

Wienerov proces - poznámka k disperzii

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

https://archive.org/stream/coursdanalysede00caucgoog

(rovnica je na str. 104)

Poznámka

- Rovnica (2) je známa ako Cauchyho funkcionálna rovnica
- Nachádza sa v (ekvivalentnom) tvare $f(x+y) = f(x) + f(y)$ s podmienkou spojitosti v jeho *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* z r. 1821.
- Bez dodatočnej podmienky existujú netriviálne riešenia

Wienerov proces - dôkaz existencie

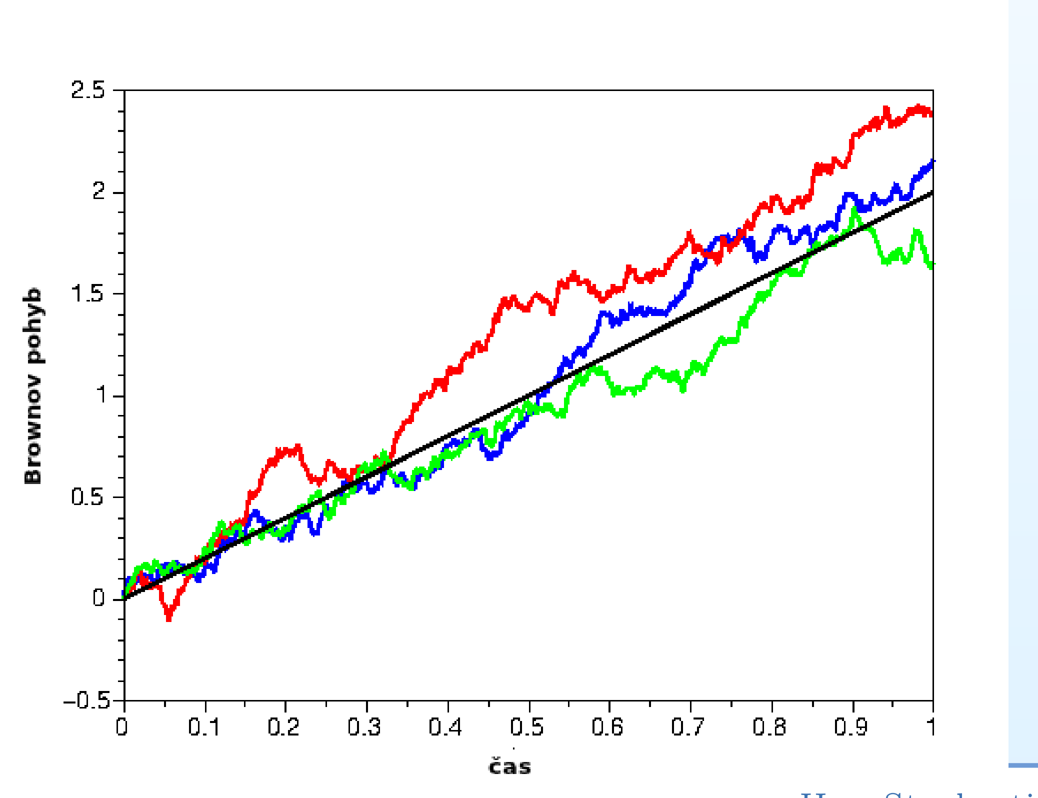
DOMÁCA ÚLOHA:

- Sformulujte vetu a ukážte jej použitie na túto situáciu, ktorá sa dá použiť na dôkaz existencie procesu s vlastnosťami zo str. 14

  Doteraz sme uvažovali iba intuitívnu limitu (pripomeňme si, že existujú rôzne typy konvergencie náhodných premenných, toto sme nešpecifikovali) a nedostali sme sa k sporu pri výpočte disperzie - ale to ešte nedokazuje existenciu
- Kde tento postup zlyhá (napr.) pri podmienke $\mathbb{D}[w(t+\Delta t) - w(t)] = (\Delta t)^2$?

Brownov pohyb

- Brownov pohyb :
$$x(t) = \mu t + \sigma w(t),$$
kde $w(t)$ je Wienerov proces
- Pravdepodobnostné rozdelenie $x(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$
- Trajektórie s vyznačenou strednou hodnotou:



Brown, Wiener *et al.*: Historické poznámky

Henry William Pickersgill: *Portrait of Robert Brown*, 1864

http://nla.gov.au/nla.pic-an11278663

- **Robert Brown** (1773 - 1858), škótsky botanik
- Článok s názvom *A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies*

Brown, Wiener *et al.*: Historické poznámky

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Clarkia_pulchella.jpg

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Clarkia_pulchella_flower.jpg

- Mikroskopom pozoroval zrnká peľu z *Clarkia pulchella* (na obr. vľavo) vo vode
- Malé peľové čiastočky sa rýchlo poybovali
- Pohyb sa dal pozorovať aj pri čiastočkách z anorganického materiálu
- Dnes to vieme vysvetliť kolíziami molekúl

Brown, Wiener *et al.*: Historické poznámky

- **Albert Einstein** (1905), **Marian Smoluchowski** (1906): vysvetlenie Brownovho pohybu
- **Jean Baptiste Perrin**: séria experimentov (1900-1912), určenie hodnoty Avogadrovej konštanty, Nobelova cena za fyziku v r. 1926

  Perrinova prednáška pri preberaní Nobelovej ceny:

  http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1926/perrin-lecture.html
- **Norbert Wiener** (1923): prvá úplná matematická konštrukcia Brownovho pohybu ako spojitého stochastického procesu
- **Norbert Wiener, Paul Lévy, ...**: matematické vlastnosti

Aplikácie vo financiách: Historické poznámky

Louis Bachelier (1900): obhajoba práce *Théorie de la spéculation* na Sorbonne

- Na začiatku: popis produktov na francúzskej burze v tom čase
- Model: Brownov pohyb ako model pre cenu akcie
- Výsledky:
  - odvodenie pravdepodobnostného rozdelenia, súvislosť s rovnicou vedenia tepla
  - výpočet pravdepodobnosti, že Brownov pohyb neprekročí zadanú úroveň
  - odvodenie pravdepodobnostného rozdelenia suprema Brownovho pohybu

Aplikácie vo financiách: Historické poznámky

THÉORIE

DE

LA SPÉCULATION,

PAR M. L. BACHELIER.

INTRODUCTION.

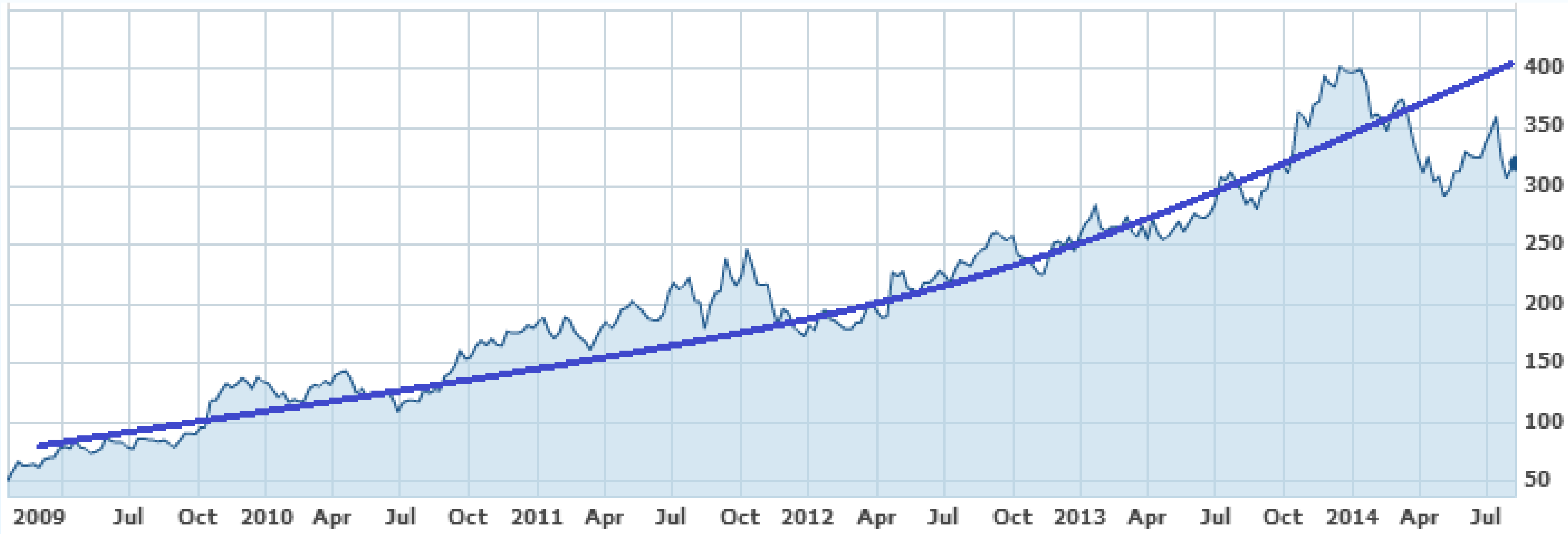
Les influences qui déterminent les mouvements de la Bourse sont

Celt́ text: http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1900_3_17__21_0 (po francúzsky)

DNES: Brownov pohyb - nie ako model pre cenu akcie, ale pre jej logaritmus

Geometrický Brownov pohyb: motivácia

- Motivácia - reálne ceny akcií (AMZN) a ich trend:



http://finance.yahoo.com

- Bezriziková investícia rastie pri spojitom úročení exponenciálne: $x(t) = x_0 e^{rt}$
- Pridáme náhodnosť: $x(t) = x_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$

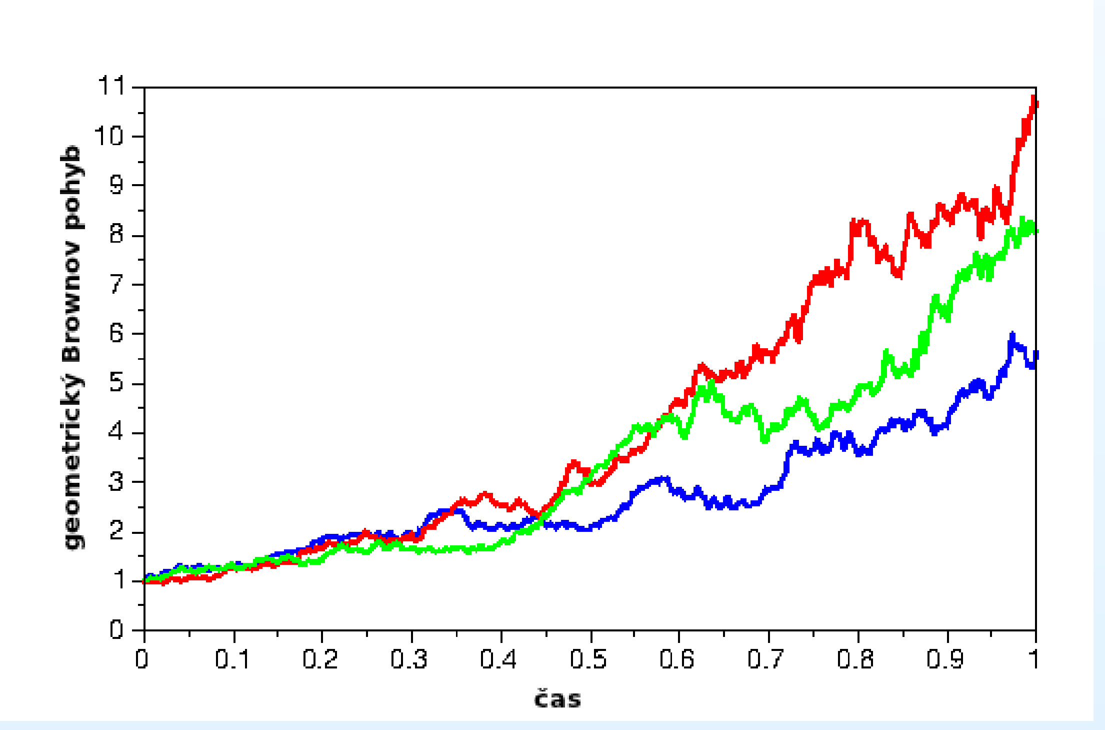
Geometrický Brownov pohyb

- Geometrický Brownov pohyb:

$$x(t) = x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t)),$$

kde $w(t)$ je Wienerov proces

- Ukážka trajektórií:



- Odvodíme strednú hodnotu a disperziu GBP.

GBP - stredná hodnota, disperzia

- Pripomeňme si z pravdepodobnosti:
  Ak X je náhodná premenná s hustotou f, tak stredná hodnota $g(X)$ je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$.
- Teda napríklad: $\mathbb{E}[e^X] = \int_{-\infty}^{\infty} e^x f(x)dx$.
- V našom prípade potrebujeme:

$$\mathbb{E}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] = x_0 \mathbb{E}\left[\exp(\mu t + \sigma w(t))\right],$$

pričom vieme, že

$$\mu t + \sigma w(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t);$$

teda $\mu t + \sigma w(t)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}}$$

GBP - stredná hodnota, disperzia

- Teda:

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu t+\sigma w(t)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\left[\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t} - x\right]} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{[x-(\mu t+\sigma^2 t)]^2 - 2\mu\sigma^2 t^2 - \sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}} dx \\
&= e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{[x-(\mu t+\sigma^2 t)]^2}{2\sigma^2 t}} dx \\
&= e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t}{2}}
\end{aligned}$$

GBP - stredná hodnota, disperzia

- Disperzia:
$$\mathbb{D}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] = x_0^2\, \mathbb{D}\left[\exp(\mu t + \sigma w(t))\right]$$
- Pripomeňme si, že disperzia náhodnej premennej X sa dá vyjadriť ako $\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$ - takže potrebujeme $\mathbb{E}\left[\left(e^{\mu t+\sigma w(t)}\right)^2\right]$
- Podobne ako pri výpočte strednej hodnoty:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(e^{\mu t+\sigma w(t)}\right)^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^x)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx \\ &= e^{2\mu t+2\sigma^2 t}\end{aligned}$$

GBP - stredná hodnota, disperzia

- Zhrnutie:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] &= x_0\, e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \\ \mathbb{D}\left[x_0 \exp(\mu t + \sigma w(t))\right] &= x_0^2\, e^{2\mu t + \sigma^2 t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)\end{aligned}$$

- Iné odvodenie:
  - odvodíme najprv hustotu GBP (lognormálne rozdelenie - budeme s ním pracovať na cvičeniach) a použijeme ju na výpočet strednej hodnoty a disperzie $\rightarrow$ učebnica [Ševčovič, Stehlíková, Mikula] - DOMÁCA ÚLOHA
  - použitím Itóovej lemy $\rightarrow$ neskôr v tejto prednáške

Model pre ceny akcie

- Model: cena akcie $S(t)$ sa riadi geometrickým Browovym pohybom
$$S(t) = S_0 \exp(\mu t + \sigma w(t)),$$
- Budeme používať logaritmické výnosy:
$$return_t = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right)$$

Model pre ceny akcie

- Potom máme:

$$
\begin{aligned}
returns_t &= \log\left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta t}}\right) \\
&= \log\left(\frac{S_0 e^{\mu t+\sigma w(t)}}{S_0 e^{\mu(t-\Delta t)+\sigma w(t-\Delta t)}}\right) \\
&= \log\left(e^{\mu\Delta t+\sigma(w(t)-w(t-\Delta t))}\right) \\
&= \mu\Delta t + \sigma(w(t) - w(t-\Delta t)) \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2 t)
\end{aligned}
$$

a tieto výnosy sú nezávislé

Ceny akcie - odhad parametrov GBP

Postupujeme nasledovne:

1. Označme $\Delta t =$ dĺžka časového intervalu medzi dvoma pozorovaniami [v rokoch]
2. Vypočítame výnosy - podľa modelu sú to IID $\mathcal{N}(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ náhodné premenné
3. Odhadneme ich strednú hodnotu a disperziu:
   - $m =$ aritmetický priemer výnosov $\to$ odhad strednej hodnoty $\mu\Delta t$
   - $s^2 =$ výberová disperzia výnosov $\to$ odhad disperzie $\sigma^2\Delta t$
4. Odhadneme parametre GBP:

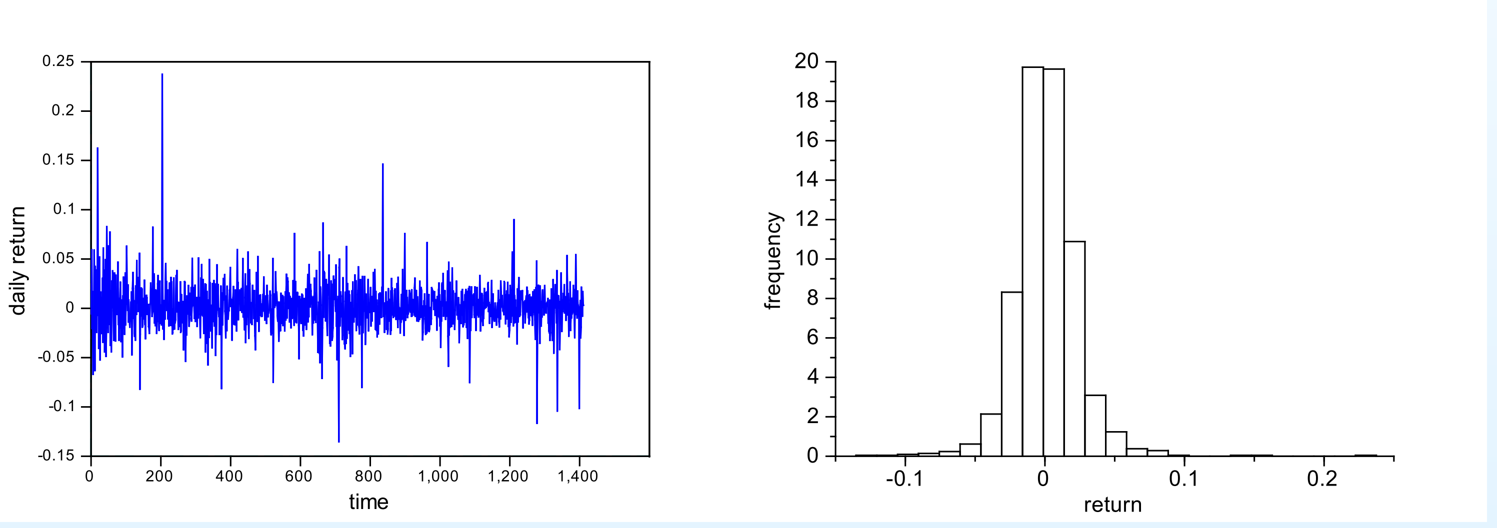
$$\mu = \frac{m}{\Delta t}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{s^2}{\Delta t}}$$

Odhadovanie parametrov - príklad

- Ceny akcií AMZN (str. 27), denné dáta
- Vypočítame výnosy:

```
n=length(s);
returns=log(s(2:n)./s(1:(n-1)));
```

- Výnosy - časový rad a histogram:



Odhadovanie parametrov - príklad

- Vypočítame odhady:

```
muDelta=mean(returns);
sigma2Delta=variance(returns);

mu=muDelta/dt;
sigma=sqrt(sigma2Delta/dt);
```

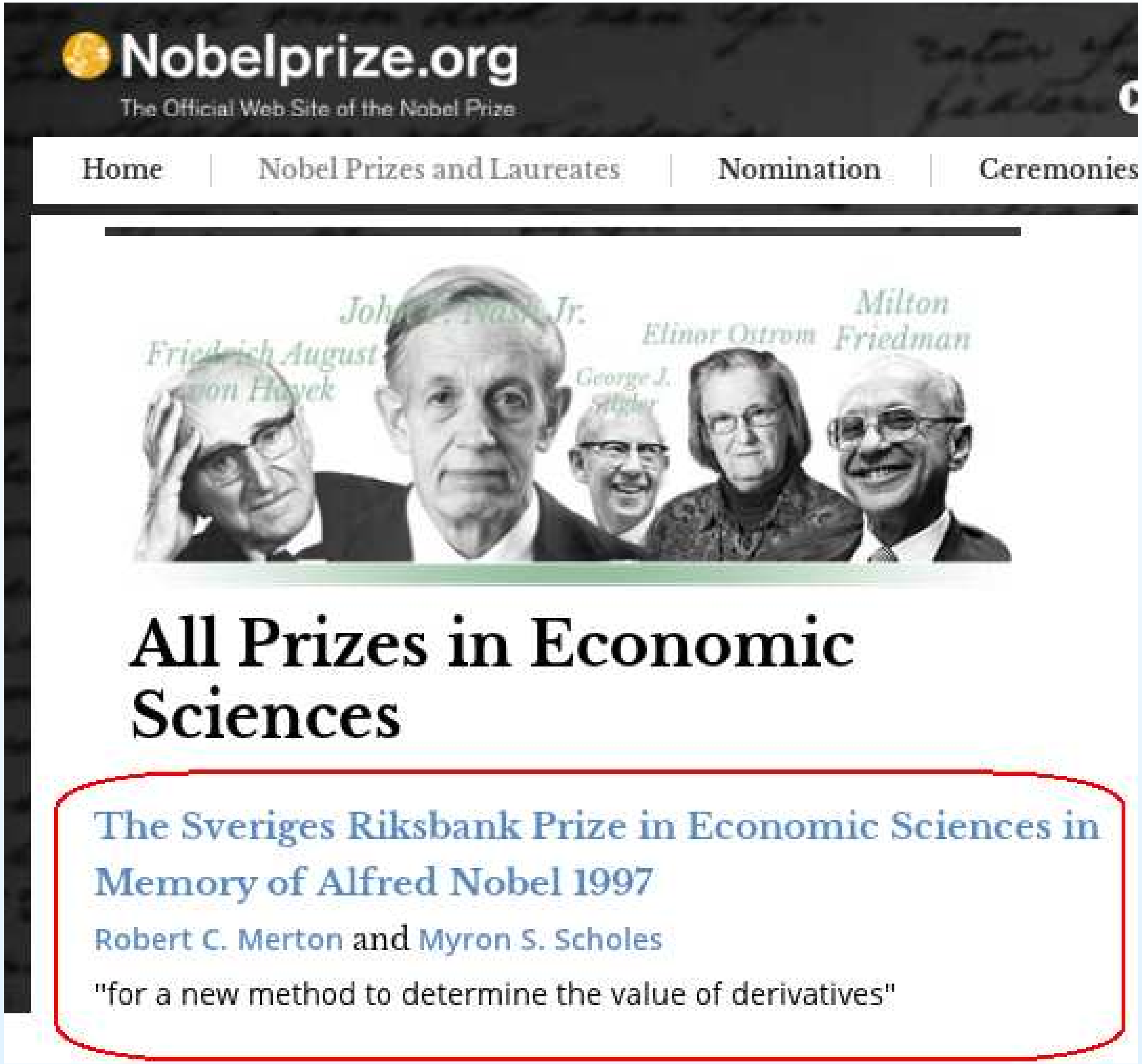
- Výsledky:

```
-->mu
 mu  =

    0.3162172

-->sigma
 sigma  =

    0.3672489
```

Odhadovanie parametrov - príklad

- Použitie $\rightarrow$ NA CVIČENIACH:
  - simulácie cien v budúcnosti, porovnanie s realitou
  - pravdepodobnostné rozdelenie cien a výnosov
  - výpočet pravdepodobností rôznych udalostí

Itóova lema


Nobelprize.org
The Official Web Site of the Nobel Prize
Home
Nobel Prizes and Laureates
Nomination
Ceremonies
Milton Friedman
Elinor Ostrom
All Prizes in Economic Sciences
The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1997
Robert C. Merton and Myron S. Scholes
"for a new method to determine the value of derivatives"

Itóova lema

Guillermo Ferreyra: **The Mathematics Behind the 1997 Nobel Prize in Economics**

http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-black-scholes-ito

- *Feature Column* na stránke Americkej matematickej spoločnosti:

  > *Black and Scholes determined explicitly a stochastic process model for the evolution of the price s of certain assets, and, further, developed a formula for the value $V = V(s,t)$ of the European call option. This is a function of the random variable s and of the time variable t. Once again, the work of K. Itô supplies the needed* ***chain rule to differentiate V as a function of these two variables****.*

Itóova lema

- Pokračovanie:

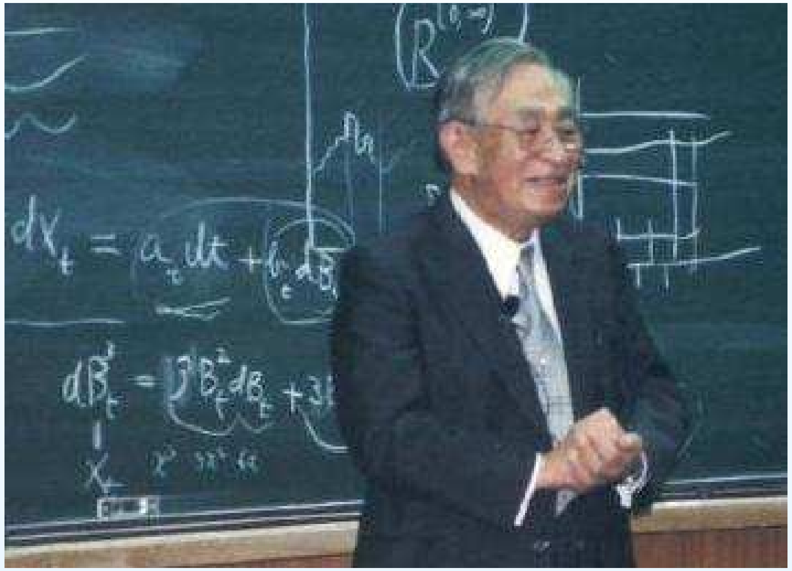
  Differentiation of composition of real valued functions is studied in freshman calculus. Itô's rule is similar in spirit, but it is the differentiation rule for functions of random processes when the random processes are solutions of SDE's. Moreover, the rule looks like the ordinary chain rule studied in calculus, but with ***an additional summand called Itô's correction term.*** *Using this rule Black and Scholes were able to deduce their formula for* V

- Na ďalších prednáškach vysvetlíme aj:

  As a byproduct of their deduction, they obtained a ratio for the mix between options and assets so that the resulting mix is hedged against fluctuations in the market price of the asset.

Itóova lema

- Itóova lema - ako počítať diferenciály náhodných funkcií:



Prednáška pri príležitosti 80. narodenín, Kjoto, 1995

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/˜kenkyubu/past-director/ito/ito-kiyosi.html

- Na obrázku:
  Čo je dx, ak $x = w^3$, kde w je Wienerov proces?
- Vidíme: $d(w^3) = 3w^2\,dw + \ldots$ - čo je ten ďalší člen?

Itóova lema: jednoduchší špeciálny prípad

- Nech $f = f(t, w)$ kde w je Wienerov proces
- Taylorov rozvoj do druhého rádu:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial w} dw + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dw)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial t} dw\, dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right) + \ldots$$

- Z toho, že $dw = \Phi\sqrt{dt}$, kde $\Phi \approx N(0,1)$, vyplýva:

$$(dw)^2 \approx dt$$

- Podobne:$dw\, dt = O((dt)^{3/2})$
- Členy rádu dt, dw v rozvoji df teda sú:

$$df = \frac{\partial f}{\partial w} dw + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \right) dt$$

Itóova lema - príklad

- PRÍKLAD:
  Úloha na obrázku (str. 42); máme $f(t, w) = w^3$:

$$d(w^3) = 3w^2 dw + 3w dt$$

Itóova lema - formulácia

Nech $f(x,t)$ je C^2 hladká funkcia premenných x, t a nech proces $\{x(t), t \geq 0\}$ vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw,$$

Potom

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dw \end{aligned}$$

Itóova lema - intuitívny dôkaz

- Ako predtým - rozvoj do druhého rádu:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dx\,dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2\right) + \ldots$$

- Z toho, že $dw = \Phi\sqrt{dt}$, kde $\Phi \approx N(0,1)$, vyplýva, že

$$\begin{aligned} (dx)^2 &= \sigma^2(dw)^2 + 2\mu\sigma dw\,dt + \mu^2(dt)^2 \\ &\approx \sigma^2 dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2) \end{aligned}$$

- Podobne: $dx\,dt = O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)$
- Členy rádu dt, dw v rozvoji df teda sú:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt$$

Itóova lema - príklad

- PRÍKLAD: Cena akcie sledujúca geometrický Brownov pohyb $S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma w(t)}$:

$$dS = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S dt + \sigma S dw$$

- PRÍKLAD: Niekedy sa model píše v tvare

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

- tiež GBP, ale s inými parametrami:

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma w(t)}$$

- Ďalšie príklady na cvičeniach

Momenty GBP: pomocou Itóovej lemy

- Nech $Y(t) = x_0 \exp(X(t))$, kde $X(t) = \mu t + \sigma w(t)$
- Zoberieme $f(t,x) = x_0 e^x \;\Rightarrow$

$$dY = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) Y dt + \sigma Y dw$$

- Potom:

$$\begin{aligned} d\mathbb{E}[Y] &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathbb{E}[Y] dt + \sigma \mathbb{E}[Y dw] \\ &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \mathbb{E}[Y] dt \end{aligned}$$

  čo je ODR pre $\mathbb{E}Y(t)$
- Začiatočná podmienka: $\mathbb{E}Y(0) = x_0$
- Riešenie tejto ODR so začiatočnou podmienkou:
  $\mathbb{E}[Y] = x_0 e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t}$

Momenty GBP: pomocou Itóovej lemy

Na výpočet $\mathbb{D}[Y]$ potrebujeme $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[x_0^2 \exp(X(t))^2]$:

- Zoberieme $f(t,x) = x_0^2 (e^x)^2 = x_0^2 e^{2x} \;\Rightarrow$

$$d(Y(t)^2) = df = 2(\mu + \sigma^2) Y(t)^2 dt + 2\sigma Y(t)^2 dw$$

- Potom

$$d\mathbb{E}[(Y(t)^2)] = 2(\mu + \sigma^2)\mathbb{E}[(Y(t)^2] dt$$

  čo je ODR pre $\mathbb{E}[Y^2]$

- Začatočná podmienka: $\mathbb{E}[Y(0)^2] = x_0^2$
- DOMÁCA ÚLOHA: Dokončite tento výpočet.

Itóova lema v oceňovaní finančných derivátov

- Prvý krok v odvodení Black-Scholesovho modelu na oceňovanie finančných derivátov:
  - Predpokladajme, že cena akcie vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici (GBP) $dS = \mu S dt + \sigma S dw$
  - Cena derivátu V (napr. opcie) závisí od času t a od ceny akcie S, teda $V = V(S, t)$
  - Stochastická diferenciálna rovnica pre cenu derivátu sa potom získa použitím Itóovej lemy

Viacrozmerná Itóova lema - motivácia

- Derivát môže závisieť od viacerých podkladových aktív
- Príklad: *spread option* - opcia s payoffom

$$V(S_1, S_2, T) = \max(0, S_1 - S_2)$$

- Potrebujeme dV pre $V = V(S_1, S_2, t)$

Viacrozmerná Itóova lema - všeobecne

- Náhodný proces (pre $i = 1, \ldots, n$)

$$dx_i = \mu_i(\vec{x}, t)dt + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}(\vec{x}, t)dw_k,$$

kde $\vec{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)'$ je vektor Wienerovych procesov s korelačnou maticou $(\rho_{ij})_{i,j=1}^n$

$$\mathbb{E}[dw_i\, dw_j] = \rho_{ij} dt$$

- Hladká funkcia

$$f = f(\vec{x}, t) = f(x_1, x_2, ..., x_n, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}$$

- Počítame df

Viacrozmerná Itóova lema - všeobecne

- Znovu Taylorov rozvoj:

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \nabla_x f . d\vec{x} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left((d\vec{x})^T \nabla_x^2 f \, d\vec{x} + 2\frac{\partial f}{\partial t} . \nabla_x f d\vec{x} \, dt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} (dt)^2 \right) + \ \ldots
\end{aligned}
$$

- Členy $dt \, dx_i$, $(dt)^2$ sú vyššieho rádu ako dt
- Členy $dx_i \, dx_j$:

$$
\begin{aligned}
dx_i \, dx_j &= \sum_{k,l=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{jl} dw_k \, dw_l + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2) \\
&\approx \sum_{k,l=1}^{n} \sigma_{ik}\sigma_{jl}\rho_{kl} dt + O((dt)^{3/2}) + O((dt)^2)
\end{aligned}
$$

Viacrozmerná Itóova lema - príklad

Demonštrujeme tento postup na príklade.

- PRÍKLAD:
  Vypočítajte dV, ak $V = V(t, S_1, S_2)$ kde S_1 a S_2 sú GBP

$$dS_i = \mu_i S_i dt + \sigma_i S_i dw_i \quad (i = 1, 2)$$

a $Cor(w_1, w_2) = \rho$.

Kijoši Itó (1915-2008)

In precisely built mathematical structures, mathematicians find the same sort of beauty others find in enchanting pieces of music, or in magnificent architecture.

...

Without numerical formulae, I could never communicate the sweet melody played in my heart. Stochastic differential equations, called "Ito Formula", are currently in wide use for describing phenomena of random fluctuations over time. When I first set forth stochastic differential equations, however, my paper did not attract attention. It was over ten years after my paper that other mathematicians began reading my "musical scores" and playing my "music" with their "instruments".

K. Itó, abstrakt prednášky

My Sixty Years along the Path of Probability Theory (1998).

Celá prednáška: http://www.inamori-f.or.jp/laureates/k14_b_kiyoshi/img/lct_e.pdf