

### *III. Black-Scholesov model: Odvodenie a riešenie*

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

# Obsah

- Black-Scholesov model:
  - Predpokladajme, že cena akcie  $S$  sa riadi geometrickým Brownovým pohybom

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

- + ďalšie predpoklady (o chvíľu)
  - Odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu
- Dva spôsoby odvodenia:
  - od Blacka a Scholesa
  - od Mertona
- Explicitné riešenie pre európsku call a put opciu

# Predpoklady

- Ďalšie predpoklady (okrem GBP):
  - konštantná bezriziková úroková miera  $r$
  - žiadne transakčné náklady
  - dá sa kupovať/predávať ľubovoľné množstvo (aj neceločíselné) akcií, rovnako hotovosť
  - žiadne obmedzenia na *short selling*
  - opcie sú európskeho typu
- Najskôr uvažujme akciu, ktorá nevypláca dividendy

# Odvođenje I. - podľa Blacka a Scholesa

- Označenie:  
 $S$  = cena akcie,  $t$  = čas  
 $V = V(S, t)$  = cena opcie
- Portfólio: 1 opcia,  $\delta$  akcií  
 $P$  = hodnota portfólia:  $P = V + \delta S$
- Zmena hodnoty portfólia:  $dP = dV + \delta dS$
- Z predpokladov:  $dS = \mu S dt + \sigma S dw$ , Z Itóovej lemy:  
 $dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw$

- Teda:

$$dP = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt + \left( \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \delta \sigma S \right) dw$$

# Odvođenje I. - podľa Blacka a Scholesa

- Eliminujeme náhodnosť:  $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$
- Nenáhodné portfólio  $\Rightarrow$  jeho hodnota musí byť rovnaká ako keby sme mali peniaze uložené na účte s úrokom  $r$ :  
 $dP = rPdt$
- Rovnosť dvoch vyjadrení pre  $dP$  a dosadenie  $P = V + \delta S$ :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

# Dividendy v odvodení Blacka a Scholesa

- Majme spojitú dividendovú mieru  $q$  - držanie akcie v hodnote  $S$  na intervale dĺžky  $dt$  prináša dividendy  $qSdt$
- V tomto prípade je zmena hodnoty portfólia  $dP = dV + \delta dS + \delta qSdt$
- Rovnakým postupom ako predtým dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

## Odvođenje podľa Mertona - motivácia

- Problém s predchádzajúcim odvođením:
  - máme portfólio pozostávajúce z 1 opcie a  $\delta$  akcií
  - vypočítame jeho hodnotu a zmenu hodnoty:

$$P = V + \delta S,$$
$$dP = dV + \delta dS,$$

teda považujeme  $\delta$  za konštantu

- dostaneme však  $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$

## Odvođenje II. - podľa Mertona

- Portfólio z opcií, akcií a hotovosti s vlastnosťami:
  - v každom čase má portfólio nulovú hodnotu
  - je samofinancované

- Označenie:

$Q_S =$  počet akcií, každá má hodnotu  $S$

$Q_V =$  počet opcií, , každá má hodnotu  $V$

$B =$  hotovosť, ktorá je úročená úrokovou mierou  $r$

$dQ_S =$  zmena v počte akcií

$dQ_V =$  zmena v počte opcií

$\delta B =$  zmena hotovosti spôsobená kupovaním/predávaním akcií a opcií



## Odvođenje II. - podľa Mertona

- Mathematická formulácia požadovaných vlastností:
  - nulová hodnota:  $S Q_S + V Q_V + B = 0$  (1)
  - samofinancovanosť:  $S dQ_S + V dQ_V + \delta B = 0$  (2)
- Zmena hotovosti:  $dB = rB dt + \delta B$
- Diferencujeme (1):

$$\begin{aligned} 0 &= d(SQ_S + VQ_V + B) = d(SQ_S + VQ_V) + \overbrace{dB}^{rB dt + \delta B} \\ &= \underbrace{SdQ_S + VdQ_V + \delta B}_{=0} + Q_S dS + Q_V dV + rB dt \\ 0 &= Q_S dS + Q_V dV - \overbrace{r(SQ_S + VQ_V)}^{rB} dt. \end{aligned}$$

## Odvođenje II. - podľa Mertona

- vydelíme  $Q_V$  a označíme  $\Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}$ :  
 $dV - rV dt - \Delta(dS - rS dt) = 0$
- Máme  $dS$  z predpokladu o GBP a  $dV$  z Itóovej lemy
- Zvolíme  $\Delta$  (teda pomer počtu akcií a opcií) tak, aby sme eliminovali náhodnosť (koeficient pri  $dw$  bude nula)
- Dostaneme rovnakú PDR ako predtým:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

# Dividendy v Mertonovom odvodení

- Majme spojitú dividendovú mieru  $q$ .
- Dividendy spôsobia nárast hotovosti  $\Rightarrow$  zmena hotovosti je  
 $dB = rB dt + \delta B + qSQ_S dt$
- Rovnakým postupom dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

# Black-Scholesova PDR: zhrnutie

- Matematická formulácia modelu:  
Nájdite riešenie  $V(S, t)$  parciálnej diferenciálnej rovnice (Black-Scholesovej PDR)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

ktorá platí pre  $S > 0, t \in [0, T)$ .

- Doteraz sme nevyužili to, že oceňujeme práve opciu  $\Rightarrow$  PDR platí pre každý derivát, ktorý má v danom čase  $T$  payoff závislý od ceny akcie v tomto čase
- Typ derivátu určuje koncovú podmienku v čase  $T$
- Teda:  $V(S, T) =$  payoff derivátu

# Black-Scholesova PDE: jednoduché riešenia

## JEDNODUCHÉ "DERIVÁTY":

- Ak oceniť deriváty s nasledovnými payoffmi:
  - $V(S, T) = S \rightarrow$  je to vlastne akcia  $\rightarrow V(S, t) = S$
  - $V(S, T) = E \rightarrow$  s istotou dostaneme hotovosť  $E \rightarrow$   
 $V(S, t) = Ee^{-r(T-t)}$
- dosadením do PDR vidíme, že sú to naozaj riešenia

## CVIČENIA:

- Nájdite cenu derivátu s payoffom  $V(S, T) = S^n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ .  
NÁVOD: Hľadajte riešenie v tvare  $V(S, t) = A(t)S^n$
- Nájdite všetky riešenia Black-Scholesovej PDR, ktoré nezávisia od času, teda  $V(S, t) = V(S)$

## Black-Scholesova PDR: binárna opcia

---

- Uvažujme binárnu opciu, ktorá vyplatí 1 USD ak je v čase expirácie cena akcie vyššia ako  $E$ , inak nevyplatí nič
- V tomto prípade

$$V(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{ak } S > E \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Hlavnou myšlienkou je transformácia Black-Scholesovej PDE na rovnicu vedenia tepla
- Transformácie sú nezávislé od typu derivátu; ten ovplyvňuje iba začiatočnú podmienku RVT

# Black-Scholesova PDR: transformácie

---

## FORMULÁCIA PROBLÉMU

- Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

ktorá platí pre  $S > 0, t \in [0, T)$ .

- Koncová podmienka  $V(S, T) = \text{payoff derivátu}$  for  $S > 0$

# Black-Scholesova PDR: transformácie

## KROK 1:

- Transformácia  $x = \ln(S/E) \in \mathbb{R}$ ,  $\tau = T - t \in [0, T]$  a nová funkcia  $Z(x, \tau) = V(Ee^x, T - \tau)$
- PDR pre  $Z(x, \tau)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \in [0, T]$ :

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right) \frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0,$$

$$Z(x, 0) = V(Ee^x, T)$$

## KROK 2:

- Transformácia na rovnicu vedenia tepla
- Nová funkcia  $u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} Z(x, \tau)$ , pričom konštanty  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sa určia tak, aby PDR pre  $u$  bola RVT



# Black-Scholesova PDR: transformácie

- PDR pre  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0,$$

$$u(x, 0) = e^{\alpha x} Z(x, 0) = e^{\alpha x} V(Ee^x, T),$$

kde

$$A = \alpha\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} - r, \quad B = (1 + \alpha)r - \beta - \frac{\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2}{2}.$$

- Aby sme dostali  $A = B = 0$ , zoberieme

$$\alpha = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r^2}{2\sigma^2}$$

# Black-Scholesova PDR: transformácie

## KROK 3:

- Riešenie  $u(x, \tau)$  PDR  $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  je dané Greenovou formulou

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} u(s, 0) ds .$$

- Vypočítame integrál a spravíme spätné substitúcie  
 $u(x, \tau) \rightarrow Z(x, \tau) \rightarrow V(S, t)$

## Black-Scholesova PDR: binárna opcia (pokr.)

- Transformácie z predchádzajúcich slajdov
- Dostaneme RVT  $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = e^{\alpha x} V(Ee^x, T) = \begin{cases} e^{\alpha x} & \text{ak } Ee^x > E \\ 0 & \text{inak} \end{cases} = \begin{cases} e^{\alpha x} & \text{ak } x > 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Riešenie  $u(x, \tau)$ :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} e^{\alpha s} ds = \dots = e^{\alpha x + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\alpha^2} N\left(\frac{x + \sigma^2\tau\alpha}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

kde  $N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$  je distribučná funkcia  $N(0,1)$  rozdelenia

## Black-Scholesova PDR: binárna opcia (pokr.)

---

- Cena opcie  $V(S, t)$ :

$$V(S, t) = e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

$$\text{kde } d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

# Black-Scholesova PDR: call opcia

- Teraz:

$$V(S, T) = \max(0, S - E) = \begin{cases} S - E & \text{ak } S > E \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Rovnaká postupnosť transformácií, začiatočná podmienka pre RVT:

$$u(x, 0) = \begin{cases} e^{\alpha x} (Ee^x - E) & \text{ak } x > 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

a podobný výpočet integrálu

- Cena opcie:

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

kde  $N$  je distribučná funkcia  $N(0,1)$  a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

# Black-Scholesova PDR: call opcia

DOMÁCA ÚLOHA:

Vyriešte Black-Scholesovu PDR pre call opciu na akciu, ktorá vypláca spojité dividendy a upravte riešenie do tvaru

$$V(S, t) = S e^{-q(T-t)} N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

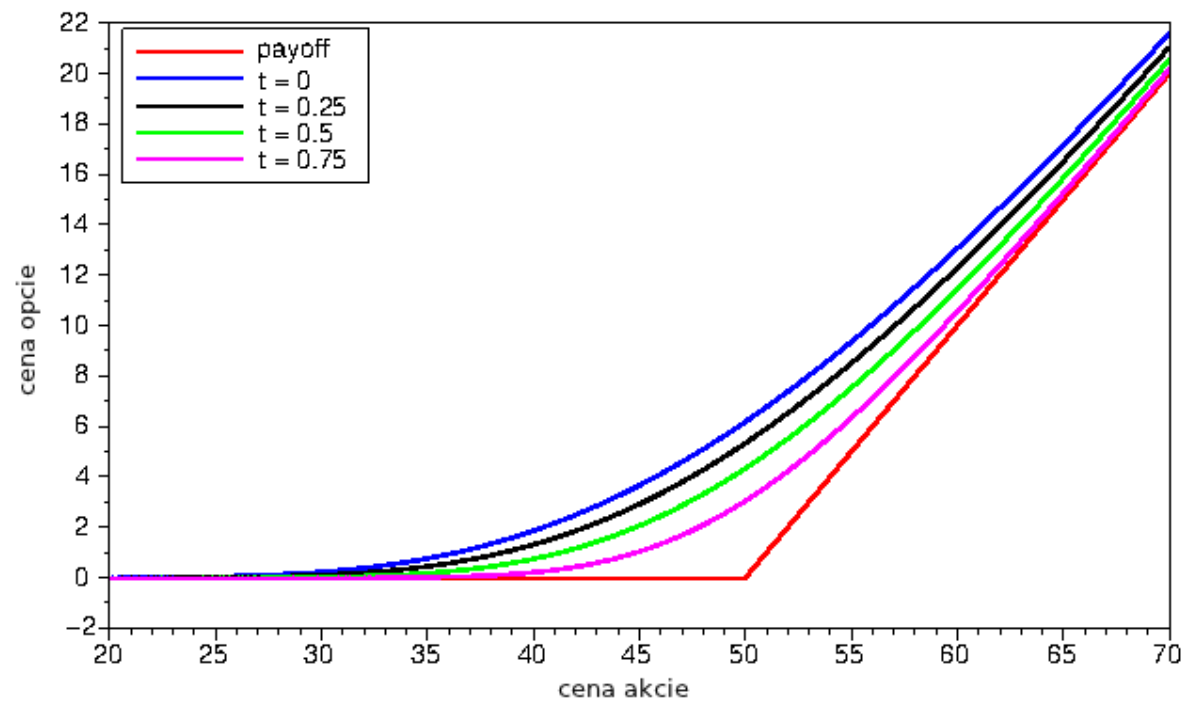
kde  $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$  je distribučná funkcia  $N(0,1)$  a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

POZNÁMKA: PDR je tu iná, takže treba zmeniť transformácie (ale postup zostáva rovnaký)

# Black-Scholesova PDR: call opcia

Payoff (teda koncová podmienka pre  $t = T = 1$ ) a riešenie  $V(S, t)$  pre niekoľko časov  $t$ :



# Black-Scholesova PDR: put opcia

## FORMULÁCIA PROBLÉMU

- Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

ktorá platí pre  $S > 0, t \in [0, T]$ .

- Koncová podmienka:

$$V(S, T) = \max(0, E - S)$$

pre  $S > 0$



# Black-Scholesova PDR: put opcia

---

## POSTUP I.

- Rovnaká postupnosť výpočtom ako v prípade call opcie

## POSTUP II.

- Využijeme linearitu Black- Scholesovej PDR a riešenie pre call opciu, ktoré už máme

Ukážeme aplikáciu druhého postupu

## Black-Scholesova PDR: put opcia

---

- Pripomeňme si:

$$-[\textit{call payoff}] + [\textit{put payoff}] + [\textit{stock price}] = E$$

- Preto:

$$[\textit{put payoff}] = [\textit{call payoff}] - S + E$$

- Black-Scholesova PDE je lineárna: lineárna kombinácia riešení je znovu riešením

## Black-Scholesova PDR: put opcia

- Pripomeňme si riešenia pre  $V(S, T) = S$  a  $V(S, T) = E$  (s. 13):

koncová podmienka	riešenie
$\max(0, S - E)$	$V^{call}(S, t)$
$S$	$S$
$E$	$Ee^{-r(T-t)}$

- Z linearity:

koncová podmienka	riešenie
$\max(0, S - E) - S + E$	$V^{call}(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)}$

- Keďže [put payoff] =  $\max(0, S - E) - S + E$ , dostaneme

$$V^{put}(S, t) = V^{call}(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

# Riešenie pre put opciu

---

- **Riešenie**

$$V^{put}(S, t) = V^{call}(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

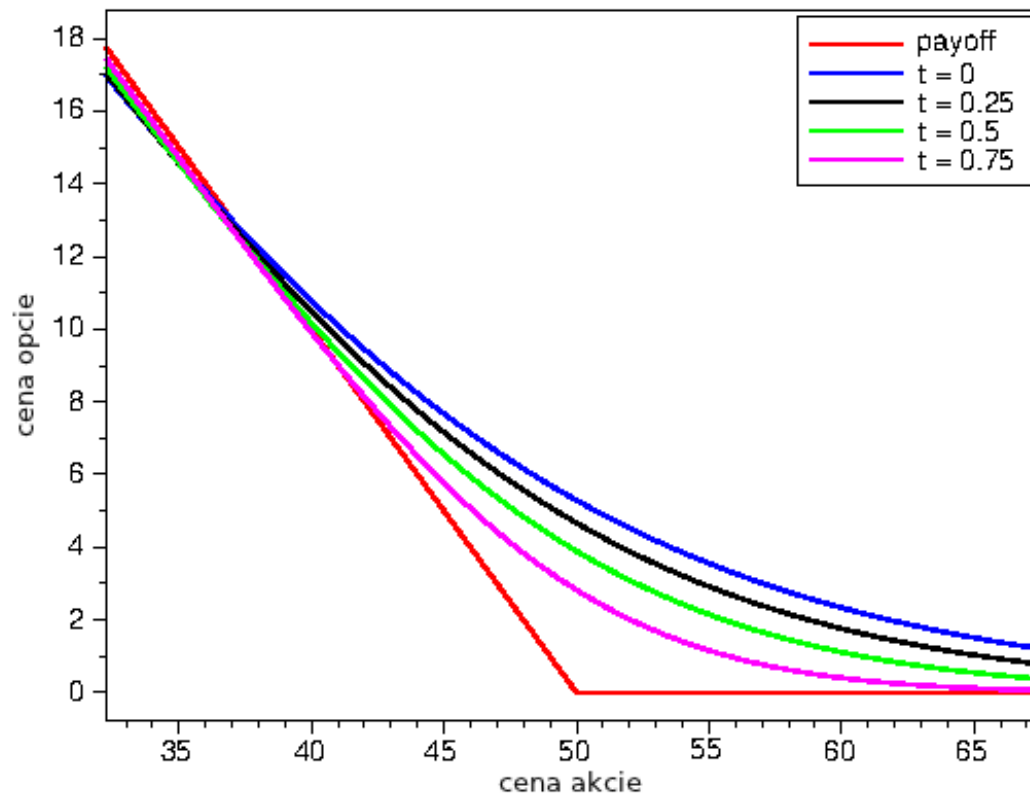
sa dá napísať v podobnom tvare ako riešenie pre call opciu:

$$V^{ep}(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

kde  $N, d_1, d_2$  sú rovnaké ako predtým

# Put opcia - príklad

Payoff (teda koncová podmienka v čase  $t = T = 1$ ) a riešenie  $V(S, t)$  pre niekoľko časov  $t$ :



# Put opcia - alternatívne riešenie

Komiks o zápornej volatilitě na stránke Espena Hauga:



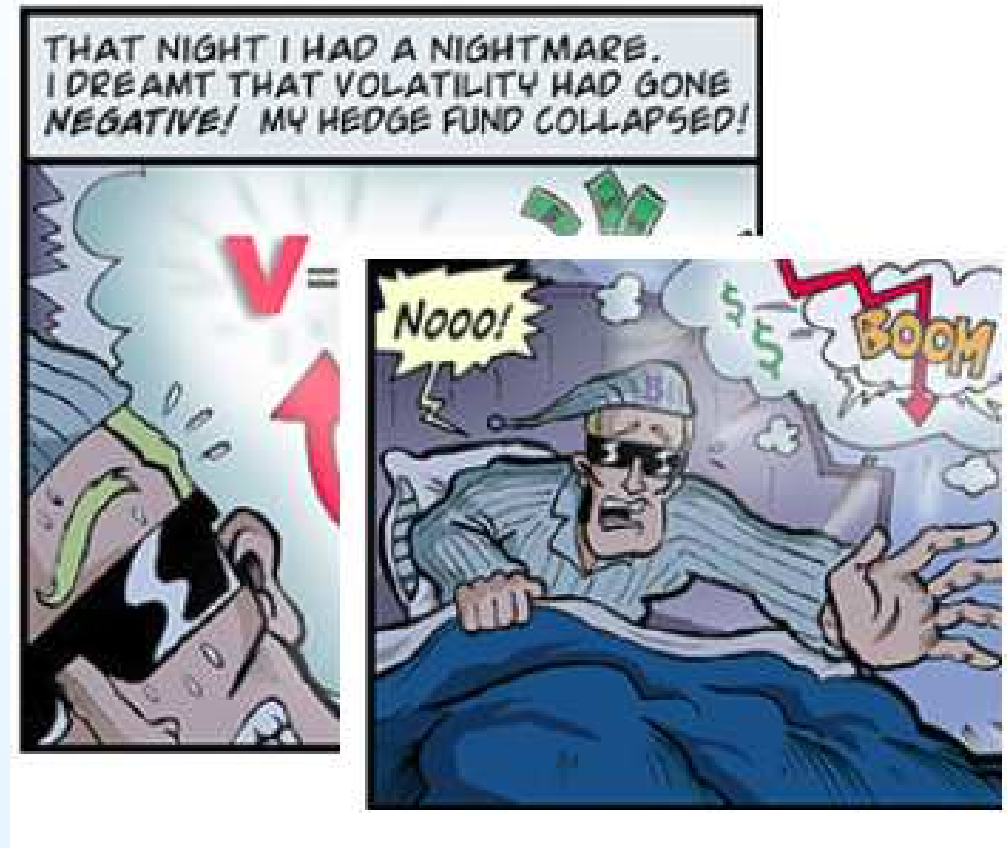
## NEGATIVE VOLATILITY

Can The Collector solve the secrets of Negative Volatility before it destroys the world?

<http://www.espenhaug.com/collector/collector.html>

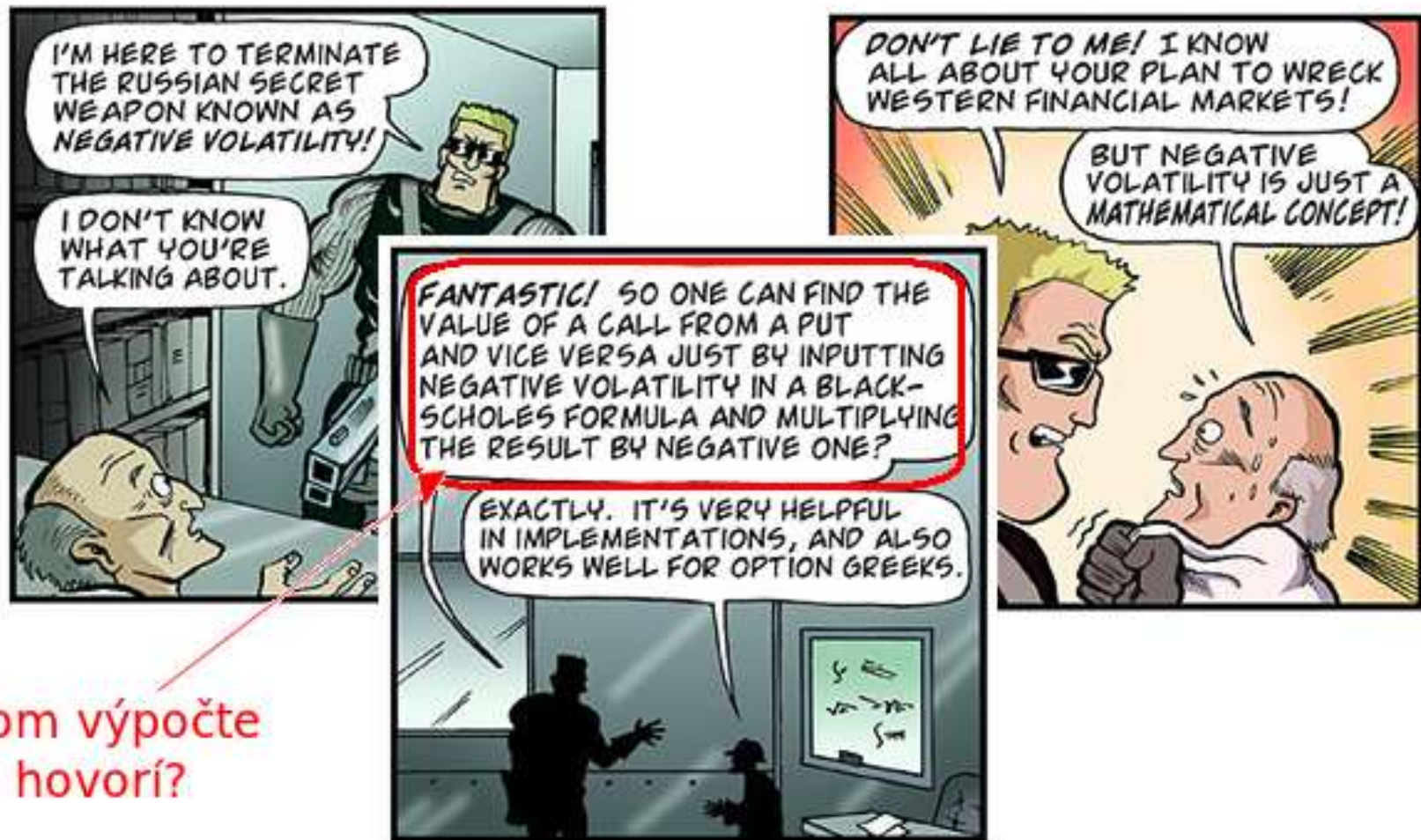
# Put opcia - alternatívne riešenie

- Zlý sen o zápornej volatilitate:



- Nie iba sen... podľa internetu skutočne existuje a spája sa s menom profesora Širjaeva z Moskvy...

# Put opcia - alternatívne riešenie



o akom výpočte  
sa tu hovorí?

OTÁZKA: Prečo takýto postup funguje?



# Akcie vyplácajúce dividendy

- DOMÁCA ÚLOHA:  
Vyriešte Black-Scholesovu PDR pre put opciu, ak akcia vypláca spojité dividendy  
NÁVOD:
  - V tomto prípade,  $V(S, t) = S$  nie je riešením
  - Ako vyzerá riešenie spĺňajúce koncovú podmienku  $V(S, T) = S$ ? Využite finančnú interpretáciu a overte svoju odpoveď dosadením do PDR
- DOMÁCA ÚLOHA:  
Označme  $V(S, t; E, r, q)$  cenu opcie s expiračnou cenou  $E$ , ak úroková miera je  $r$  a dividendová miera je  $q$ .  
Dokážte, že

$$V^{put}(S, t; E, r, q) = V^{call}(E, t; S, q, r)$$

NÁVOD: Ako sa zmenia členy  $d_1 d_2$  pri zámene  $S \leftrightarrow E, r \leftrightarrow q$ ?

# Kombinované stratégie

---

- Z linearity Black-Scholesovej PDR: ak je stratégia lineárnou kombináciou call a put opcií, tak jej cena je tou istou lineárnou kombináciou cien týchto opcií
- V iných modeloch to nemusí vždy platiť:
  - majme model s transakčnými nákladmi; nie je jedno:
    - či hedžujeme opcie nezávisle od seba
    - alebo či hedžujeme celé portfólio - takto sa môžu znížiť transakčné náklady

# Kombinované stratégie

## PRÍKLAD:

- kúpime call opcie s expiračnými cenami  $E_1, E_3$  a predáme dve call opcie s expiračnou cenou  $E_2$ , pričom  $E_1 < E_2 < E_3$  a  $E_1 + E_3 = 2E_2$ .
- Payoff stratégie  
$$V(S, T) = \max(S - E_1, 0) - 2 \max(S - E_2, 0) + \max(S - E_3, 0)$$
- Preto Black-Scholeova cena je:  
$$V(S, t) = V^{call}(S, t; E_1) - 2V^{call}(S, t; E_2) + V^{call}(S, t; E_3)$$

# Kombinované stratégie

- Numerický príklad:

