

Black-Scholesov model: implikovaná volatilita

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- 21.2.2014, krátko pred zatvorením burzy
- Akcia General Motors:

General Motors Company (GM) - NYSE ★ Follow			
36.51		0.00 (0.00%) 9:32AM EST - Nasdaq Real Time Price	
Prev Close:	36.51	Day's Range:	36.51 - 36.68
Open:	N/A	52wk Range:	26.19 - 41.85
Bid:	36.60 x 500	Volume:	67,337
Ask:	36.65 x 200	Avg Vol (3m):	26,433,200
1y Target Est:	46.44	Market Cap:	58.04B
Beta:	1.76	P/E (ttm):	15.35
Earnings Date:	Apr 28 - May 2 (Est.)	EPS (ttm):	2.38
		Div & Yield:	1.20 (3.30%)

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Vybrané opcie:

36.50	GM140314C00036500	0.92	↑0.27	
36.50	GM140328C00036500	0.99	↑0.01	
37.00	GM140307C00037000	0.51	↓0.03	
37.00	GM140314C00037000	0.67	↑0.17	
37.00	GM140322C00037000	0.73	↑0.15	
37.00	GM140328C00037000	0.77	↑0.09	

- Koľko by tieto opcie stáli v Black-Scholesovom modeli?

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Pripomeňme si Black-Scholesov vzorec pre call opciu:

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

kde $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$ a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Potrebujeme teda nasledujúce hodnoty:
 - S = cena akcie
 - E = expiračná cena
 - $T - t$ = čas zostávajúci do expirácie
 - σ = volatilita akcie
 - r = úroková miera
- Cena akcie je: $S = 36.51$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Zoberme opcii **GM140322C0037000**
- Expiračná cena: $E = 37$
- Čas do expirácie:

February						
Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	

March						
Su	Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

- opcia expiruje o 21 pracovných dní
- čas je v modeli v rokoch $\rightarrow T - t = 21/252$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Úroková miera (bonds.yahoo.com):

US Treasury Bonds Rates				
Maturity	Yield	Yesterday	Last Week	Last Month
3 Month	0.03	0.03	0.03	0.02
6 Month	0.07	0.07	0.05	0.05
2 Year	0.32	0.31	0.32	0.40
3 Year	0.72	0.70	0.67	0.85
5 Year	1.56	1.54	1.53	1.70
10 Year	2.77	2.75	2.72	2.87
30 Year	3.74	3.72	3.69	3.76

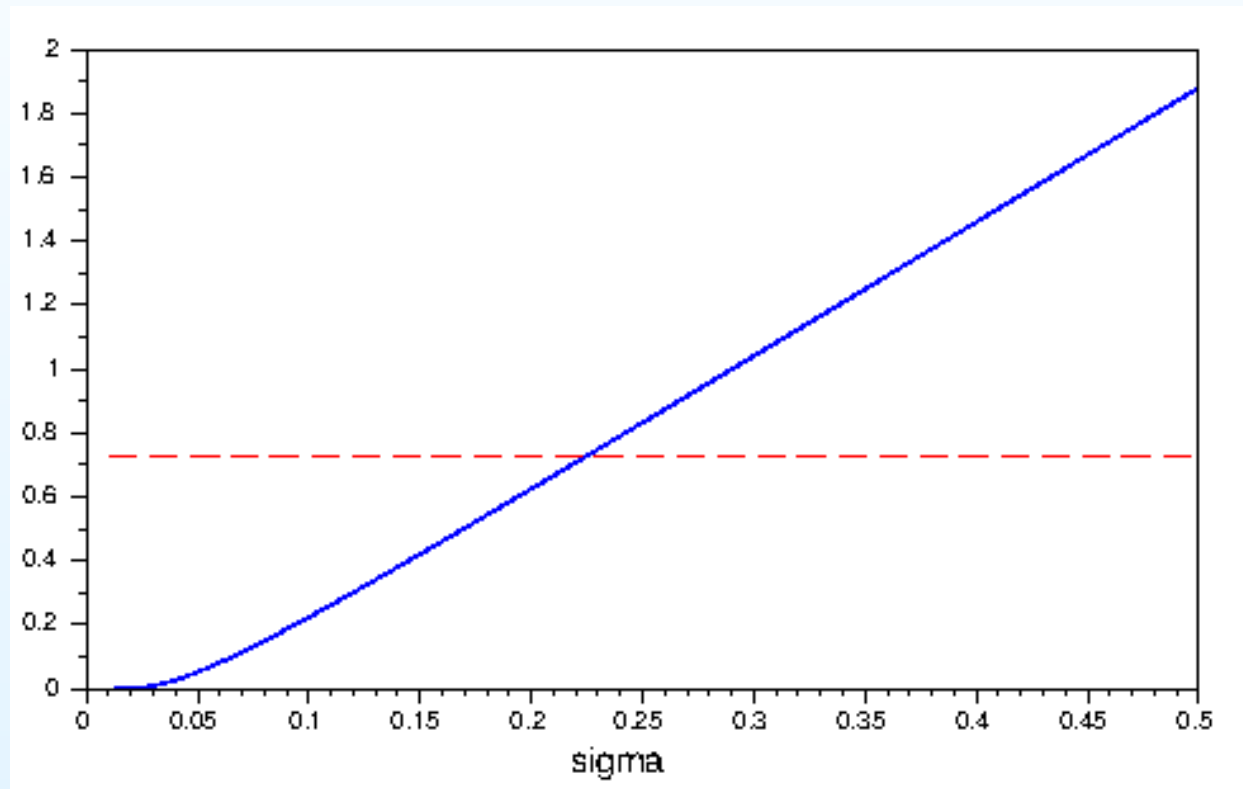
- Dost' štandardnou voľbou sú trojmesačné dlhopisy.
- Úroková miera má byť daná ako desatinné číslo, takže:
 $r = 0.03/100$

Black-Scholesov vzorec a reálne dáta

- Ale čo zobrať za volatilitu?
- Na cvičení sme videli, že pre rôzne obdobia, z ktorých berieme dáta, dostaneme rôzne odhady historickej volatility.
- Tým pádom aj rôzne ceny opcie podľa Black-Scholesa

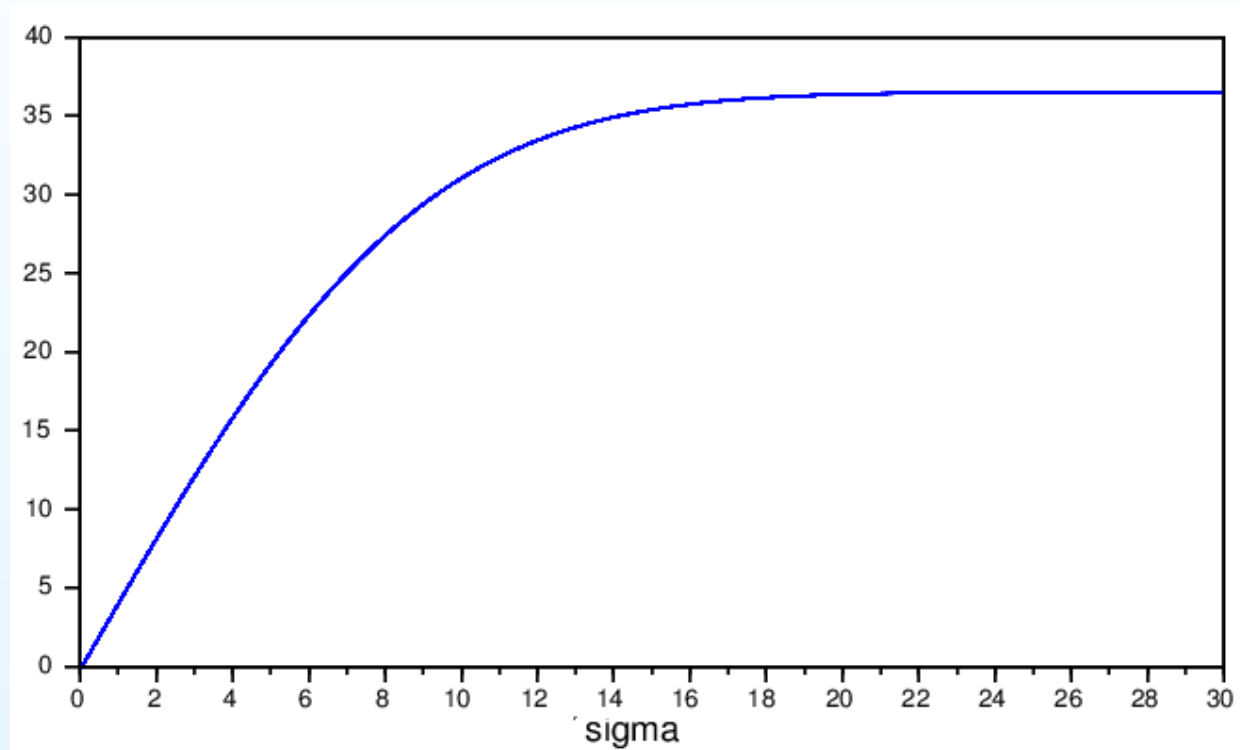
Implikovaná volatilita

- Otázka: Pre akú hodnotu volatility by sa Black- Scholesova cena rovnala reálnej trhovej cene?
Táto hodnota volatility sa nazýva implikovaná volatilita



Existencia implikovanej volatility

- Ako závisí Black-Scholesova cena tejto opcie od volatility - pre väčší rozsah hodnôt volatility:



Existencia implikovanej volatility

- Vo všeobecnosti ukážeme, že:
 - Cena call opcie je rastúcou funkciou volatility.
 - Existujú limity $V_0 := \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} V(S, t; \sigma)$,
 $V_\infty := \lim_{\sigma \rightarrow \infty} V(S, t; \sigma)$
- Potom zo spojitosti $V \Rightarrow$ pre každú reálnu cenu opcie z intervalu (V_0, V_∞) existuje implikovaná volatilita a je určená jednoznačne

Existencia implikovanej volatility

- Rastúcosť:

- Počítame deriváciu (platí $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \sigma} &= SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\ &= \left(SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\right)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \\ &\quad + Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

- Derivácia distribučnej funkcie je funkcia hustoty:

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- Užitočná lema: $SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2) = 0$

- Takže:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t} > 0$$

Existencia implikovanej volatility

- Limity:
 - Využijeme limitné vlastnosti distribučnej funkcie:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} N(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = 1$$

- Z toho:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} V(S, t; \sigma) = \max(0, S - Ee^{-r(T-t)})$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} V(S, t; \sigma) = S$$

Implikovaná volatilita: výpočet

- Ukážka implementácie:

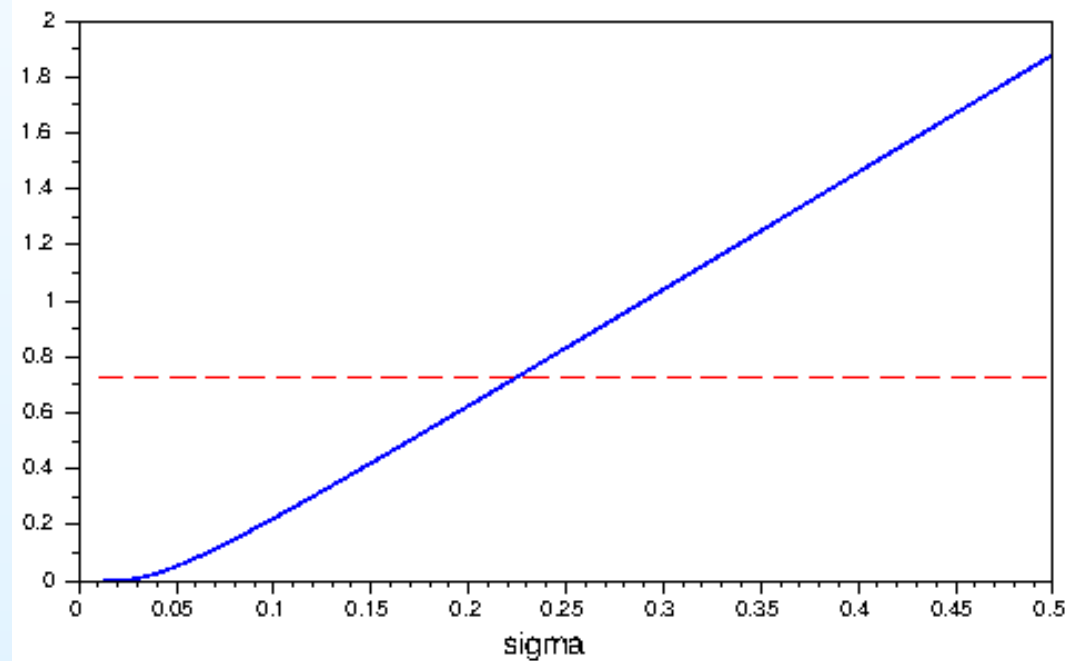
```
function [s]=ImplVolCall(S,E,r,tau,v)
// implikovaná volatilita pre call opciu na akciu bez dividend
... // rozdiel medzi teoretickou a trhovou cenou
... function [r]=rozdiel(sigma)
...     r=Call(S,E,r,sigma,tau)-v;
... endfunction
... // hladame sigmu, pre ktoru je rozdiel nulovy
... s=fsolve(0.3,rozdiel);
endfunction
```

Implikovaná volatilita: výpočet

- Výpočet:

```
-->ImplVolCall(36.51,37,0.03/100,21/252,0.73)
ans =
0.2255824
```

- Pripomeňme si:



Nová stránka finance.yahoo.com

- Tabuľka s opciami už obsahuje aj implikované volatility
- Dáta z bonusovej úlohy:

Google Inc. (GOOG) ★ Watchlist
543.29 +0.45(+0.08%) NASDAQ - As of 11:40am EST

March 27, 2015 ▾ In The Money

Calls				
Strike	Contract Name	Last	Open Interest	Implied Volatility
520.00	GOOG150327C00520000	30.00	17	20.16%
522.50	GOOG150327C00522500	25.08	10	20.01%
527.50	GOOG150327C00527500	22.70	26	19.77%
530.00	GOOG150327C00530000	21.50	40	19.66%
532.50	GOOG150327C00532500	18.70	6	18.69%

- My ale budeme potrebovať implikovanú volatilitu ako pomocný výpočet v inom modeli