Black-Scholesov model: greeks - analýza citlivosti

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK

Greeks

- Greeks:
  - derivácie ceny opcie podľa jednotlivých parametrov
  - vyjadrujú teda citlivosť ceny opcie na tieto parametre
- Už sme vypočítali $\frac{\partial V_{call}}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t}$, označuje sa Υ (vega)
- Ostatné:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \; \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \; P = \frac{\partial V}{\partial r}, \; \Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Pozn.: P je grécke písmeno ró

- Označenie: V^{ec} = cena európskeho callu, V^{ep} = cena európskeho putu; analogicky greeks pre call a put

Delta

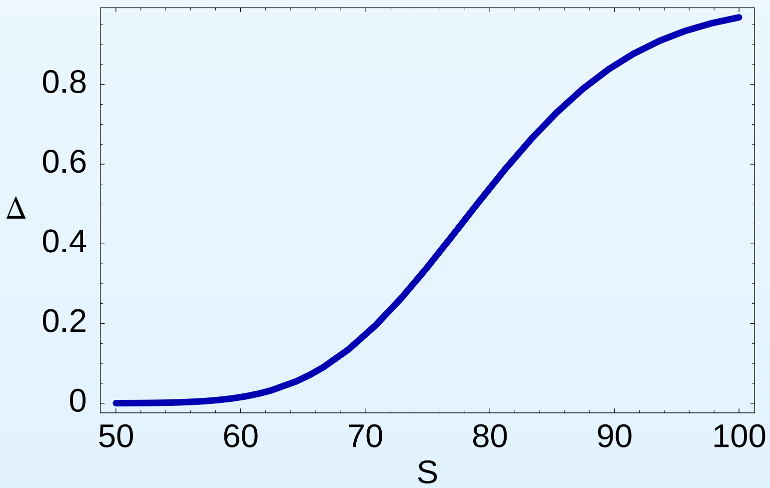
- Výsledok pre call opciu - z Black-Scholesovho vzorca, tá istá lema ako pri volatilite:

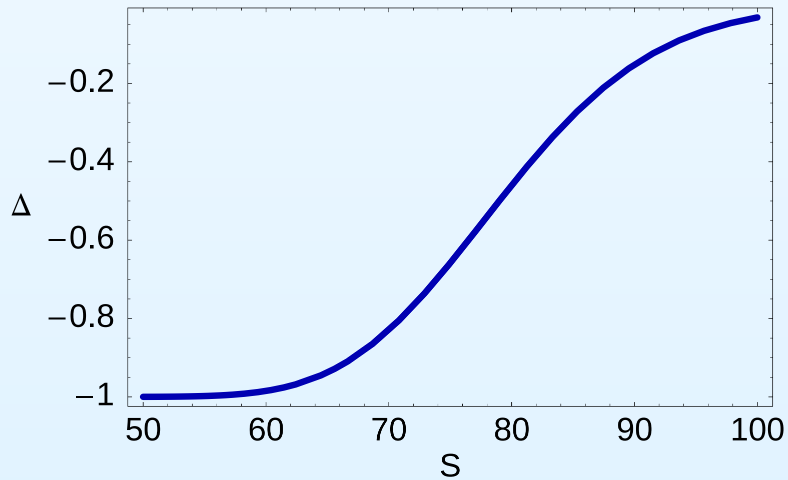
$$\Delta^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S} = N(d_1) \in (0,1)$$

- Pre put opciu - nemusíme derivovať, stačí použiť put-call paritu:

$$\Delta^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial S} = -N(-d_1) \in (-1,0)$$

- Ukážka - call vľavo, put vravo:





Delta - delta hedžing

- Pripomeňme si odvodenie Black-Scholesovho modelu a konštrukciu bezrizikového portfólia:

$$\frac{Q_S}{Q_V} = -\frac{\partial V}{\partial S} = -\Delta$$

  kde Q_V, Q_S je počet opcií a počet akcií v portfóliu

- Vytváraniu takéhoto portfólia sa hovorí delta hedžing (hedžing = zaisťovanie proti riziku)

Delta - ukážka delta hedžingu

- Príklad z reálnych dát - call opcia na akciu IBM, 21.5.2002, dáta v 5-minútových intervaloch
- V čase t:
  - máme k dispozícii cenu opcie $V_{real}(t)$ a cenu akcie $S_{real}(t)$
  - vypočítame implikovanú volatilitu, t. j. riešime rovnicu

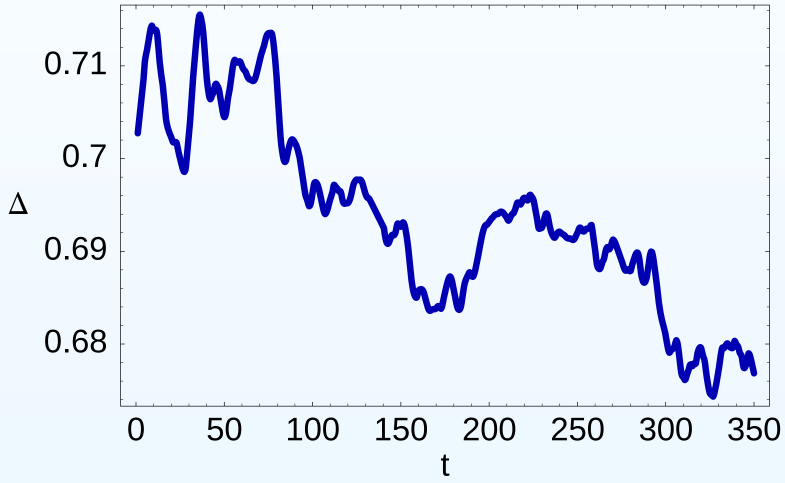
$$V_{real}(t) = V^{ec}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t)).$$

  - implikovanú volatilitu $\sigma_{impl}(t)$ dosadíme do delty call opcie:

$$\Delta^{ec}(t) = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t))$$

Delta - ukážka delta hedžingu

- Ako sa počas dňa mení delta:



- Ak by sme vypísali jednu opciu, toto by bol počet akcií v našom portfóliu

Gama

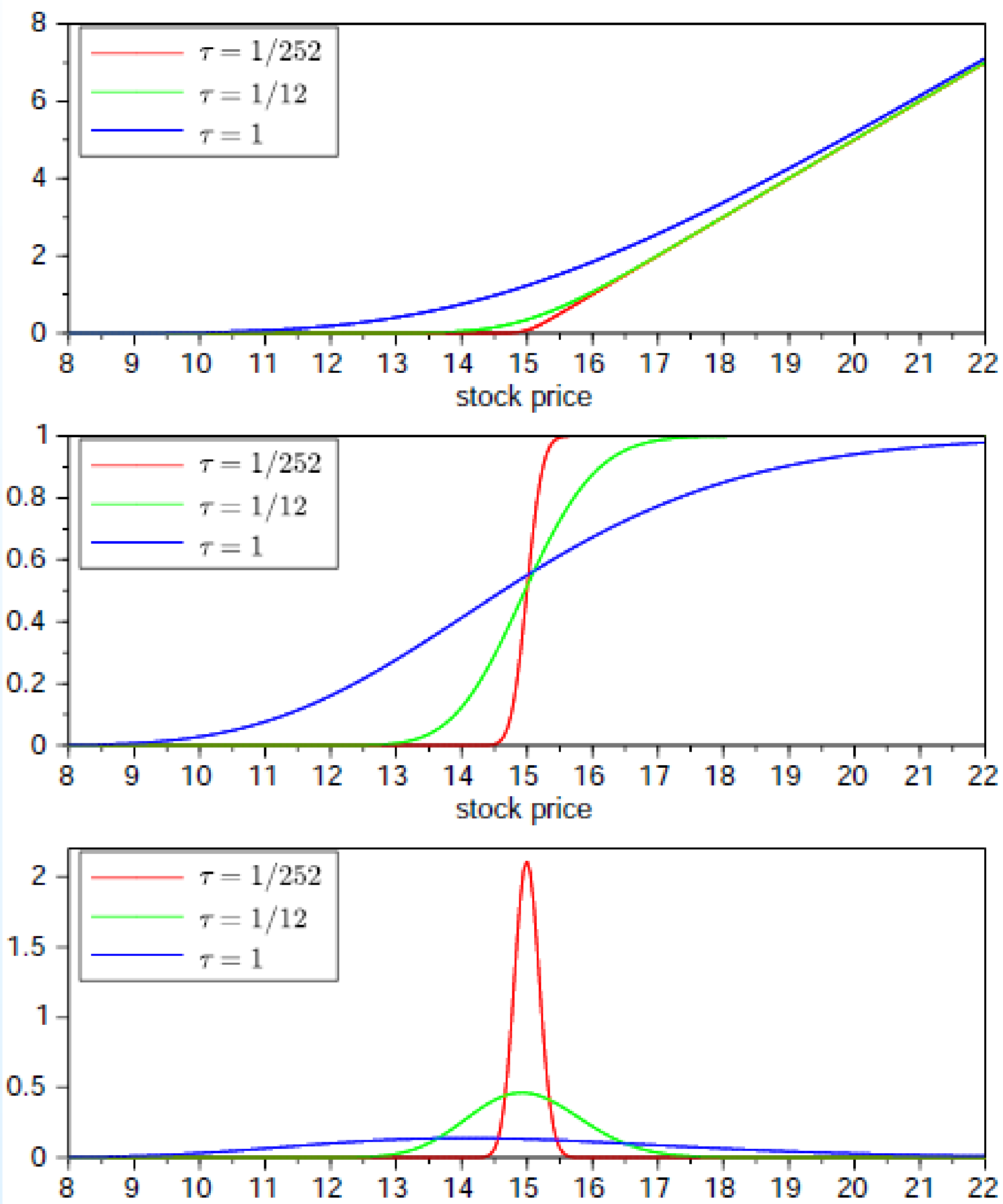
- Výpočet:

$$\Gamma^{ec} = \frac{\partial \Delta^{ec}}{\partial S} = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\exp(-\frac{1}{2}d_1^2)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}S} > 0$$

$$\Gamma^{ep} = \Gamma^{ec}$$

- Meria citlivosť delty na zmenu ceny akcie

Cena, delta, gama



Cena, delta, gama

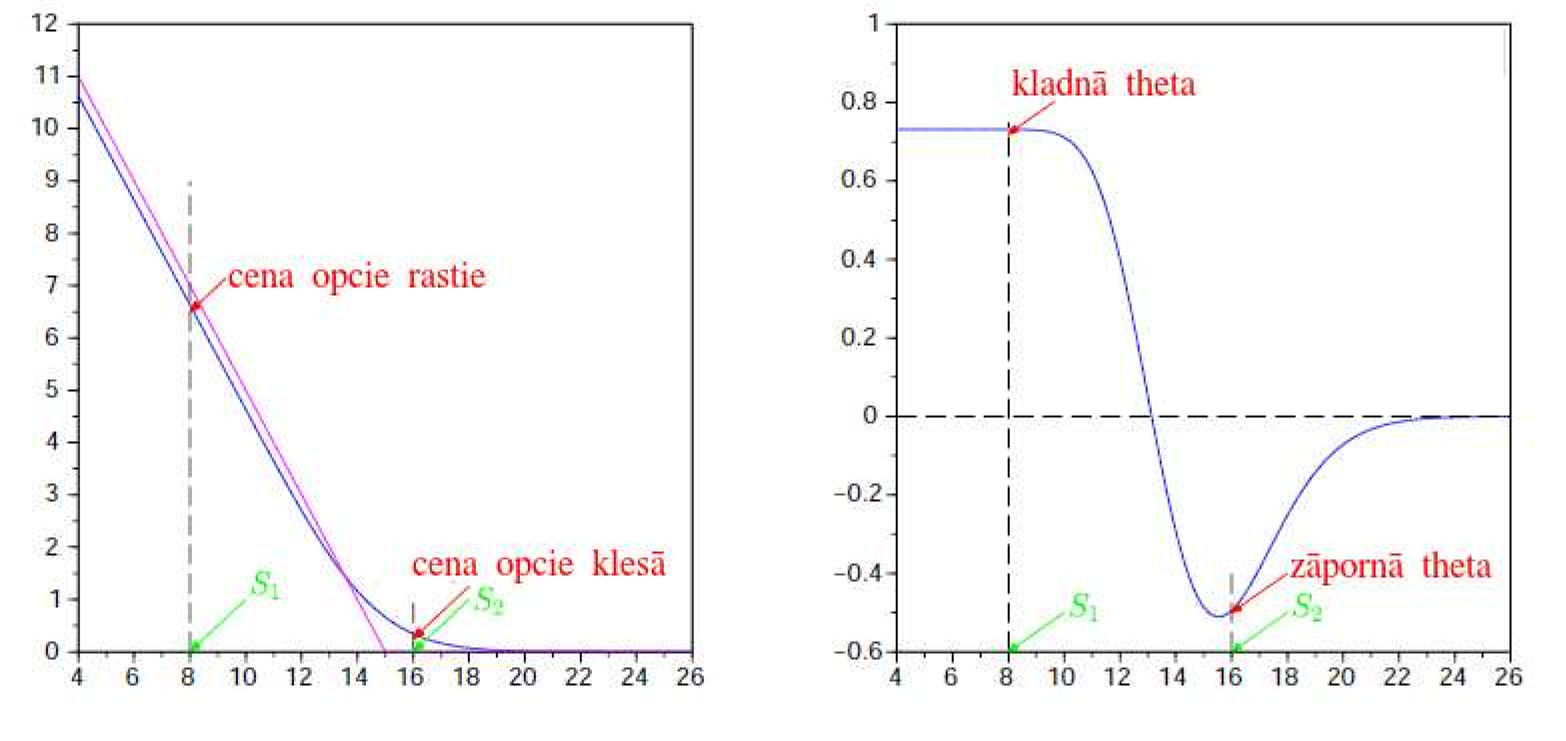
- Súčasne nastáva:
  - cena opcie je "skoro rovná čiara"
  - delta sa veľmi nemení pri malej zmene ceny akcie
  - gama je skoro nulová
- Takisto súčasne:
  - graf ceny opcie má veľkú krivosť
  - delta sa veľmi mení pri malej zmene ceny akcie
  - gama je výrazne nenulová

Vega, ró, theta

- Vega
  - vypočítali sme už:
    $\Upsilon^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial \sigma} = Ee^{-r(T-t)} N'(d_2)\sqrt{T-t} > 0$
  - z put-call parity: $\Upsilon^{ep} = \Upsilon^{ec}$
  - väčšia volatilita $\Rightarrow$ väčšia pravdep. vysokých ziskov, pritom strata je ohraničená $\Rightarrow$ kladná vega
- Ró
  - call: $P^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial r} = E(T-t)e^{-r(T-t)} N(d_2) > 0$
  - put: $P^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial r} = -E(T-t)e^{-r(T-t)} N(-d_2) < 0$
- Theta:
  - call: z finančnej mat. vieme, že ak akcia nevypláca dividendy, americkú call opciu sa neoplatí uplatniť skôr $\Rightarrow$ cena európskej a americkej opcie je rovnká $\Rightarrow$ $\Theta^{ec} < 0$

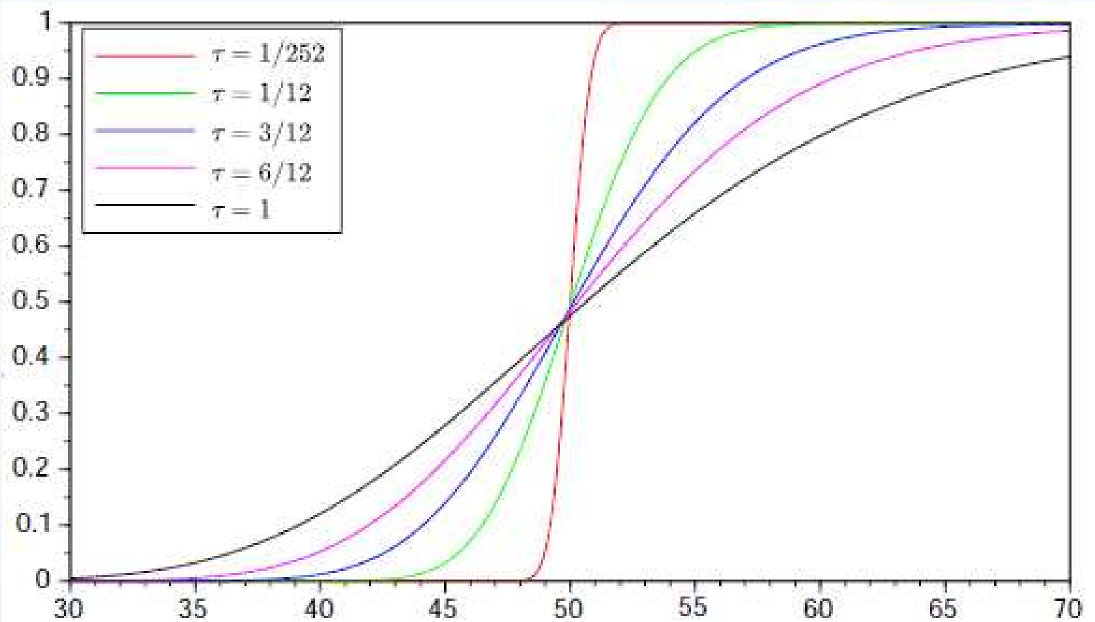
Vega, ró, theta

- Theta
  - put: nemá jednoznačne určené znamienko:



Cvičenie: "cash-or-nothing" opcia

- "Cash-or-nothing" opcia: vyplatí 1 USD, ak akcia v čase expirácie prekročí hodnotu E, inak 0.
- Cena opcie:



- Na základe interpretácie *greeks* - načrtnite priebeh delty a vegy ako funkcií ceny akcie

Cvičenie: citlivosť delty na volatilitu

- Espen Haug v článku *Know your weapon*:

> One fine day in the dealing room my risk manager asked me to get into his office. He asked me why I had a big outright position in some stock index futures - I was supposed to do "arbitrage trading". That was strange as I believed I was delta neutral: long call options hedged with short index futures. I knew the options I had were far out-of-the-money and that their DdeltaDvol was very high. So I immediately asked what volatility the risk management used to calculate their delta. As expected, the volatility in the risk-management-system was considerable below the market and again was leading to (2) a very low delta for the options. This example is just to illustrate how a feeling of your DdeltaDvol can be useful. If you have a high DdeltaDvol the volatility you use to compute your deltas becomes very important. (1)

- Otázky:
  1. Ako závisí delta od volatility použitej pri výpočte?
  2. Prečo nízka volatilita viedla k nízkej delte?
- Viac na cvičení