

Modelovanie úrokových mier I.

Beáta Stehlíková

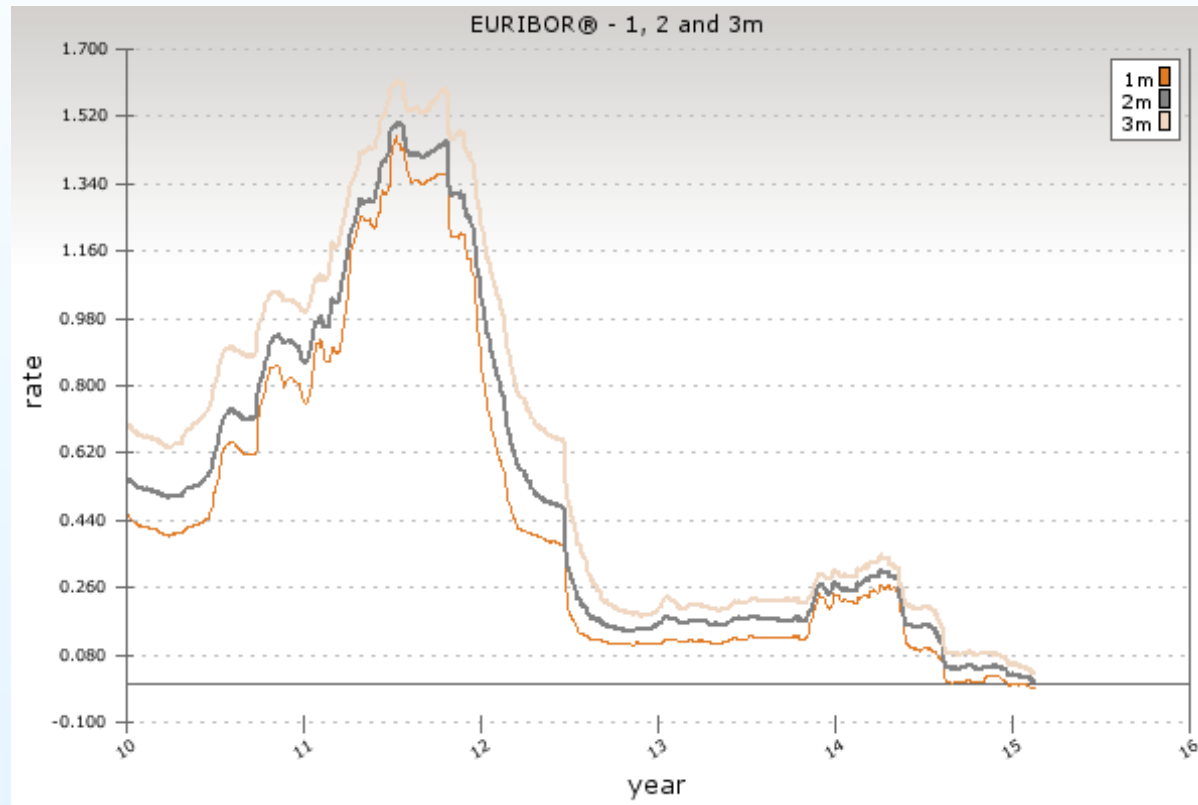
Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Úrokové miery

- Doteraz sme predpokladali, že úroková miera je konštantná , napr. pri oceňovaní bezrizikového portfólia v odvodení Black-Scholesovho modelu: $dP = rPdt$
- V skutočnosti:
 - úroková miera nie je konštantná
 - existujú úrokové miery s rôznymi splatnosťami

Úrokové miery

- Ukážka - aktuálny Euribor (European Inter-Bank Offered Rate):



<http://www.euribor-ebf.eu/>

Short rate modely

- Short rate - tzv. okamžitá úroková miera - úroková miera na nekonečne krátky čas
- Teoretická veličina, prakticky sa nahrádza úrokovou mierou na krátky čas (1 mesiac, 3 mesiace)
- Short rate modely:
 - Short rate r modelujeme pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw$$

Terminológia: $\mu(r, t)$ - drift, $\sigma(r, t)$ - volatilita

- Ostatné úrokové miery, deriváty - riešením parciálnej diferenciálnej rovnice

Mean-reversion modely

- Mean-reversion - približovanie sa k dlhodobu rovnovážnej hodnote
- Zahnutie tejto vlastnosti do short rate modelu: drift zvolíme v tvare

$$\mu(r, t) = \kappa(\theta - r)dt,$$

kde $\kappa, \theta > 0$ sú konštanty

- ODR pre strednú hodnotu $\mathbb{E}[r]$ (pri danom r_0):

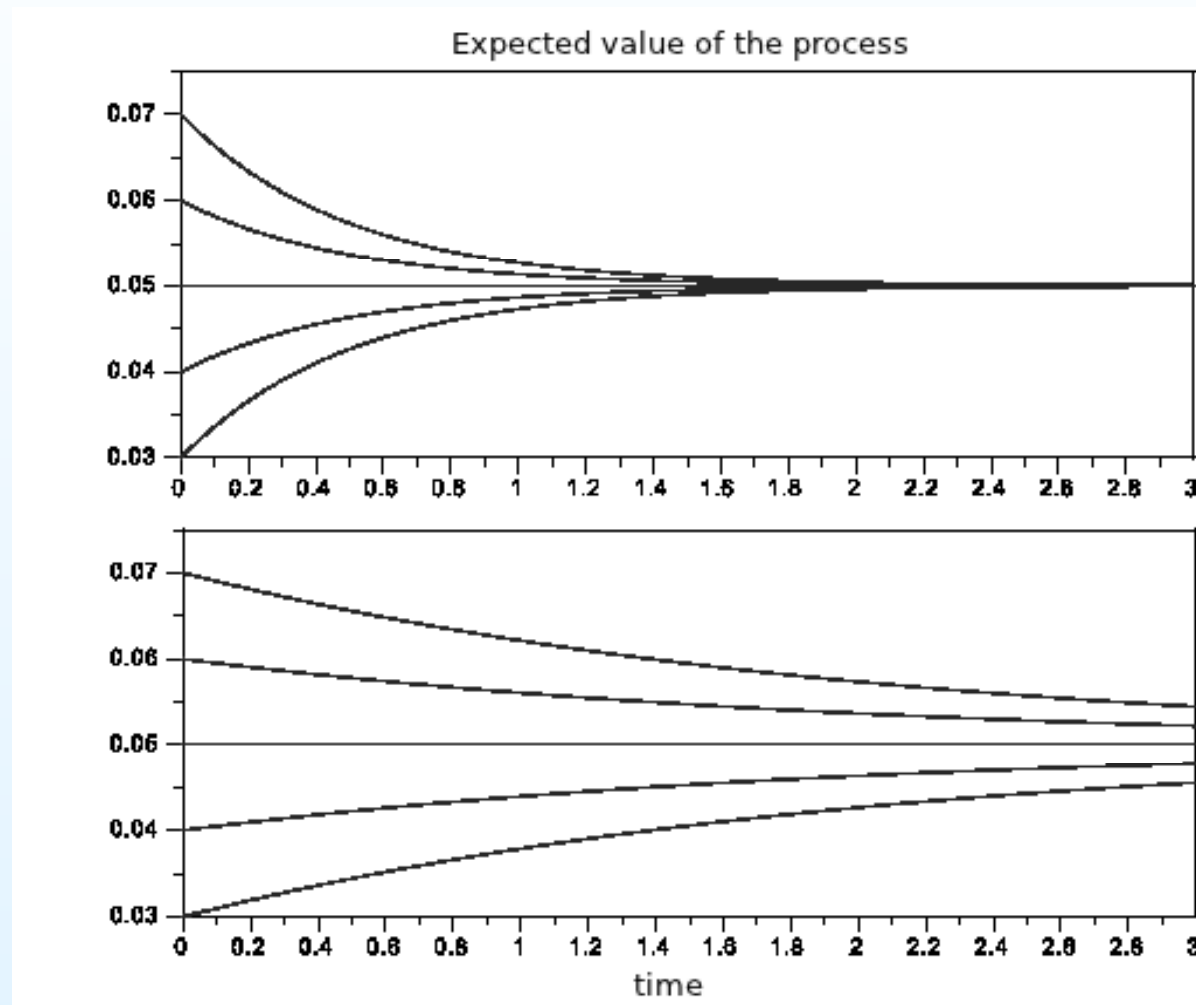
$$d\mathbb{E}[r] = \kappa(\theta - \mathbb{E}[r])dt + \mathbb{E}(\sigma(r, t)dw) = \kappa(\theta - \mathbb{E}[r])dt,$$

jej riešením je: $\mathbb{E}[r_t] = r_0 e^{-\kappa t} + (1 - e^{-\kappa t})\theta$

- Platí teda $\mathbb{E}[r] \rightarrow \theta$ pre $t \rightarrow \infty$

Mean-reversion modely

- Ukážka pre niekoľko hodnôt r_0 :



Čomu sa rovná θ ? V akom parametri sa líšia?

Mean-reversion models

- Príklad:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw$$

Ornstein-Uhlenbeckov proces, resp. Vašíčekov model pri modelovaní úrokových mier

Príklady jednofaktorových modelov

- Už spomínaný Vašíčkov model

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw$$

- Nevýhoda:
 - "historicky": pripúšťa záporné úrokové miery (zatiaľ intuitívne: aj pre r veľmi blízke nule je volatilita stále rovnaká) - toto už ale neplatí, dnes môžeme vidieť aj záporné úrokové miery
 - volatilita nezávisí od hodnoty short rate

Príklady jednofaktorových modelov

- Cox-Ingersoll-Ross:

- J. C. Cox., J. E. Ingersoll Jr, S. A. Ross, **A theory of the term structure of interest rates**, *Econometrica* (1985) 385-407.
- Short rate:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw$$

- Nepripúšťa záporné úrokové miery (intuitívne: pre $r = 0$ je volatilita nulová a drift kladný)
- Dá sa ukázať, že ak $2\kappa > \sigma^2$, tak aj dosiahnutie $r = 0$ má nulovú pravdepodobnosť (intuícia: SDR pre $y = \ln(r)$ a analýza driftu)

Príklady jednofaktorových modelov

- Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders:

- C. K. Chan, G. A. Karolyi, F. A. Longstaff, A. B. Sanders, **An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate**, The Journal of Finance 47 (1992) 1209-1227.

- Short rate:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma$$

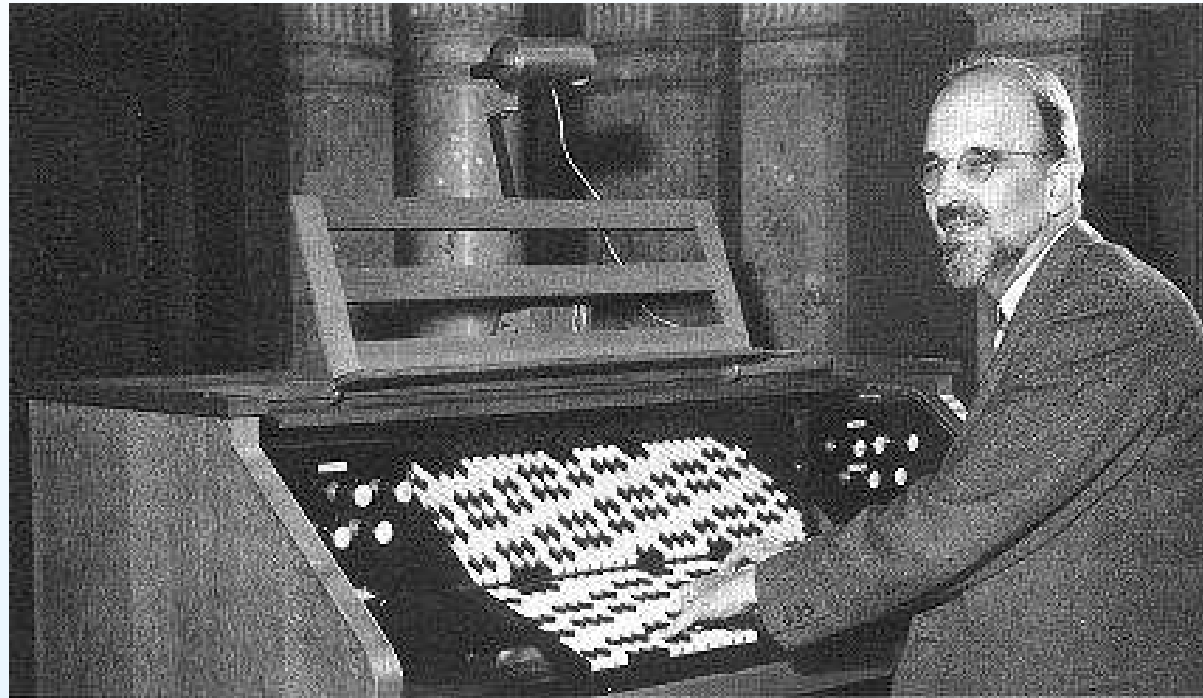
- Vašíček a CIR sú špeciálne prípady ($\gamma = 0, \gamma = 1/2$)
- Odhadovali všeobecný model (optimálna γ vyšla 1.5) a testovali $\gamma = 0, \gamma = 1/2$ ako hypotézy o parametroch → zamietli sa
- Neskôr veľa ďalších štúdií tohto typu (rôzne dáta, rôzne štatistické metódy)

Fokker-Planckova PDR

- Fokker-Planckova PDR - je to parciálna diferenciálna rovnica pre hustotu pravdepodobnostného rozdelenia hodnoty procesu
- Pre zaujímavosť:
 - Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947) spieval, hral na klavír, organ a čelo, skladal piesne a opery... rozhodol sa však študovať fyziku
 - Adriaan Daniël Fokker (1887-1972) sa zaujímal o mikrotonálnu hudbu, navrhol 31 tónový organ, ktorý bol vystavený v *Teylers Museum* v Haarleme (najstaršie holandské múzeum, Fokker bol kurátorom fyzikálneho kabinetu)

Fokker-Planckova PDR

A. D. Fokker a jeho organ:



Táto a ďalšie fotografie: <http://www.huygens-fokker.org/instruments/fokkerorgan.html>

Fokker-Planckova PDR

- Uvažujme proces

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw$$

a definujme funkciu $g(x, t)$ ako podmienenú hustotu rozdelenia procesu v čase t pri danej hodnote x_0 v čase $t = 0$

- TVRDENIE:
Potom funkcia $g(x, t)$ je riešením Fokker-Planckovej PDR

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 g) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu g)$$

so začiatočnou podmienkou $g(x, 0) = \delta(x - x_0)$.

Fokker-Planckova PDR

Poznámka k funkcii δ zo začatočnej podmienky - je to tzv. Diracova funkcia:

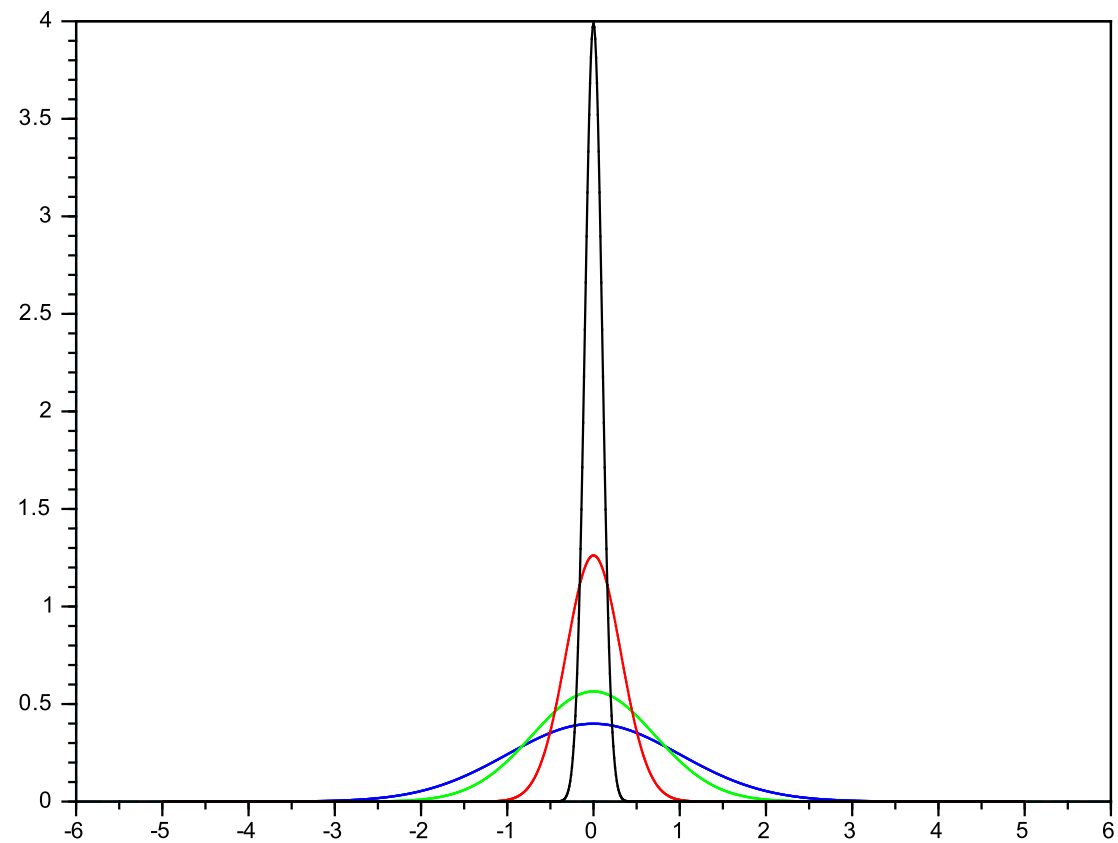
- Nie je to funkcia v klasickom zmysle slova
- Intuitívne:
 - funkcia spĺňajúca

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \neq x_0 \\ +\infty & \text{pre } x = x_0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) dx = 1.$$

- "hustota" náhodnej premennej nadobúdajúcej danú hodnotu x_0 s pravdepodobnosťou 1
- Platí: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x) dx = f(x_0)$
- Dá sa matematicky presne definovať (nebudeme to teraz robiť)

Fokker-Planckova PDR

Intuitívne - funkcie konvergujúce k Diracovej funkcii:



Fokker-Planckova PDR: dôkaz

- Nech $V = V(x, t)$ je ľubovoľná hladká funkcia s kompaktným nosičom, teda $V \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$
- Z Itóovej lemy:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) dt + \sigma \frac{\partial V}{\partial x} dW.$$

- Nech E_t je stredná hodnota vzhľadom na rozdelenie dané hustotou $g(x, t)$
- Potom

$$dE_t(V) = E_t(dV) = E_t \left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) dt \right].$$

Fokker-Planckova PDR: dôkaz

- Keďže $V \in C_0^\infty$, tak $V(x, 0) = V(x, T) = 0$ a $V(x, t) = 0$ pre $|x| > R$ kde $R > 0$ je dostatočne veľké.
- Integráciou per partes dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \frac{d}{dt} E_t(V) dt = \int_0^T E_t \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) g(x, t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} V(x, t) \left(-\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 g) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu g) \right) dx dt. \end{aligned}$$

- Pretože $V \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$ bolo ľubovoľné, pre hustotu $g = g(x, t)$ dostávame Fokker-Planckovu rovnicu

Fokker-Planckova PDR: príklady

PRÍKLAD 1: Wienerov proces $x_t = w_t$

- Máme teda: $\mu(x, t) = 0$, $\sigma(x, t) = 1$, $x_0 = 0$
- Fokker-Planckova PDR: hustota $g(x, t)$ spĺňa

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

so začiatočnou podmienkou $g(x, 0) = \delta(x)$

- Rovnica vedenia tepla \Rightarrow riešenie z Greenovho vzorca:

$$\begin{aligned} g(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) g(s, 0) ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) \delta(s) ds \\ &= G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2\pi t}}, \end{aligned}$$

čo je hustota $N(0, t)$ rozdelenia

Fokker-Planckova PDR: príklady

PRÍKLAD 2: Posunutý Brownov pohyb $x_t = x_0 + \mu t + \sigma w_t$

- Máme teda: $\mu(x, t) = \mu$, $\sigma(x, t) = \sigma$
- Fokker-Planckova PDR: hustota $g(x, t)$ spĺňa

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial g}{\partial x}$$

so začiatočnou podmienkou $g(x, 0) = \delta(x - x_0)$

- Parabolická PDR, ktorá sa exponenciálnou transformáciou $g(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t)$ transformuje na rovnicu vedenia tepla

Fokker-Planckova PDR: príklady

PRÍKLAD 3: Nech x_t je Ornestein-Uhlenbeckov proces

- Kvôli konštante pri dw môžeme očakávať normálne rozdelenie
- Už máme vypočítanú strednú hodnotu
- Budeme hľadať rovnicu pre disperziu:

```
(%i1) mi(t):=x0*exp(-kappa*t)+theta*(1-exp(-kappa*t)) $  
(%i2) g(x,t):=exp(-(x-mi(t))^2/(2*s2(t)))/sqrt(2*pi*s2(t));  
(%o2) g(x,t):=
$$\frac{\exp\left(\frac{-(x-mi(t))^2}{2s2(t)}\right)}{\sqrt{2\pi s2(t)}}$$
  
(%i3) -diff(g(x,t),t)+  
      (sigma^2/2)*diff(g(x,t),x,2)+  
      kappa*g(x,t)-  
      kappa*(theta-x)*diff(g(x,t),x) $
```

(Výpočty v softvéri wxMaxima: <http://wxmaxima.sourceforge.net>)

Fokker-Planckova PDR: príklady

- Rozložíme na súčin:

$$\begin{aligned} & \text{factor(\%);} \\ (\%04) & - \left(\frac{d}{dt} s2(t) + 2\kappa s2(t) - \sigma^2 \right) (x\theta^2 - 2e^{\kappa t} x x\theta + 2e^{\kappa t} \theta x\theta - 2\theta x\theta + e^{2\kappa t} x^2 - 2e^{2\kappa t} \theta x \\ & + 2e^{\kappa t} \theta x + e^{2\kappa t} \theta^2 - 2e^{\kappa t} \theta^2 + \theta^2 - e^{2\kappa t} s2(t)) \\ & \frac{e^{-2\kappa t} x\theta^2}{2s2(t)} + \frac{e^{-\kappa t} x x\theta}{s2(t)} - \frac{e^{-\kappa t} \theta x\theta}{s2(t)} + \frac{e^{-2\kappa t} \theta x\theta}{s2(t)} - \frac{x^2}{2s2(t)} - \frac{e^{-\kappa t} \theta x}{s2(t)} + \frac{\theta x}{s2(t)} + \frac{e^{-\kappa t} \theta^2}{s2(t)} - \frac{e^{-2\kappa t} \theta^2}{2s2(t)} - \frac{\theta^2}{2s2(t)} - 2\kappa t \\ & (2^{3/2} \sqrt{\pi} s2(t)^{5/2}) \end{aligned}$$

- Prehľadnejšie:

$$\begin{aligned} & \text{factor(\%);} \\ (\%04) & - \left(\frac{d}{dt} s2(t) + 2\kappa s2(t) - \sigma^2 \right) (x\theta^2 - 2e^{\kappa t} x x\theta + 2e^{\kappa t} \theta x\theta - 2\theta x\theta + e^{2\kappa t} x^2 - 2e^{2\kappa t} \theta x \\ & + 2e^{\kappa t} \theta x + e^{2\kappa t} \theta^2 - 2e^{\kappa t} \theta^2 + \theta^2 - e^{2\kappa t} s2(t)) \\ & \frac{e^{-2\kappa t} x\theta^2}{2s2(t)} + \frac{e^{-\kappa t} x x\theta}{s2(t)} - \frac{e^{-\kappa t} \theta x\theta}{s2(t)} + \frac{e^{-2\kappa t} \theta x\theta}{s2(t)} - \frac{x^2}{2s2(t)} - \frac{e^{-\kappa t} \theta x}{s2(t)} + \frac{\theta x}{s2(t)} + \frac{e^{-\kappa t} \theta^2}{s2(t)} - \frac{e^{-2\kappa t} \theta^2}{2s2(t)} - \frac{\theta^2}{2s2(t)} - 2\kappa t \\ & (2^{3/2} \sqrt{\pi} s2(t)^{5/2}) \end{aligned}$$

- Tento výraz sa má rovnať nule

Fokker-Planckova PDR: príklady

- Získaný výraz sa má rovnať nule \Rightarrow to platí, ak

$$s2'(t) + 2\kappa s2(t) - \sigma^2 = 0$$

- Disperzia v čase $t = 0$ je nulová \Rightarrow začiatočná podmienka $s2(0) = 0$

- Riešenie:

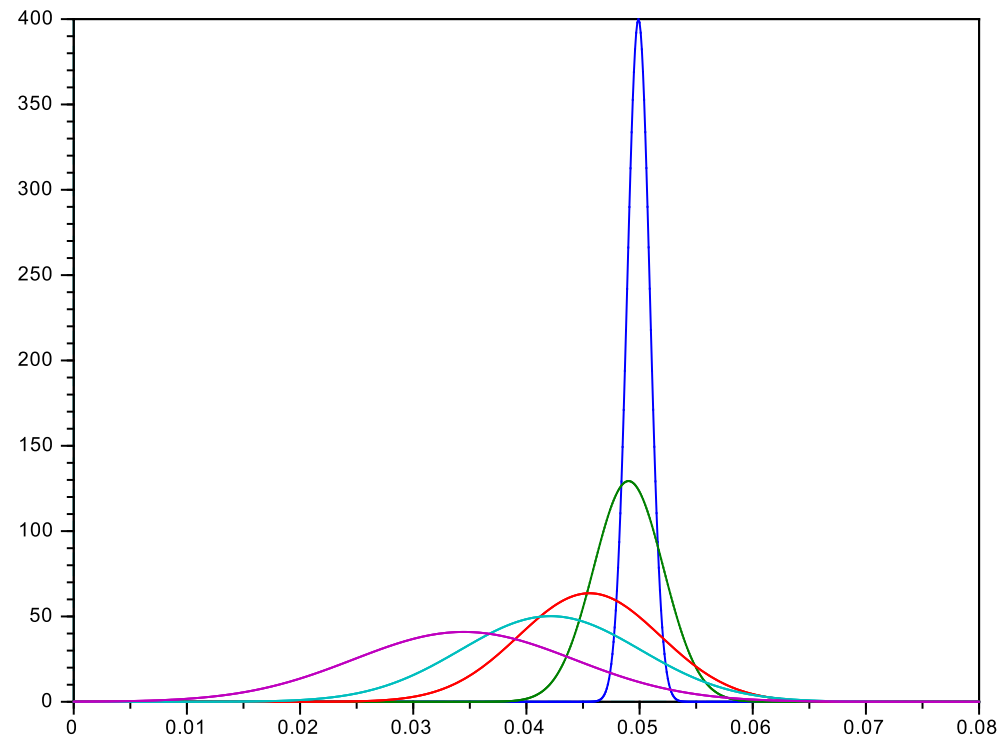
$$s2(t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t})$$

- ZÁVER:

Rozdelenie Ornstein-Uhlenbeckovho procesu je normálne rozdelenie so strednou hodnotou $r_0 e^{-\kappa t} + (1 - e^{-\kappa t})\theta$ a s disperziou $s2(t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t})$

Fokker-Planckova PDR: limitné rozdelenie

- PRÍKLAD: Ornestein-Uhlenbeckov proces - hustoty pre dané x_0 a niekoľko časov t :



Fokker-Planckova PDR: limitné rozdelenie

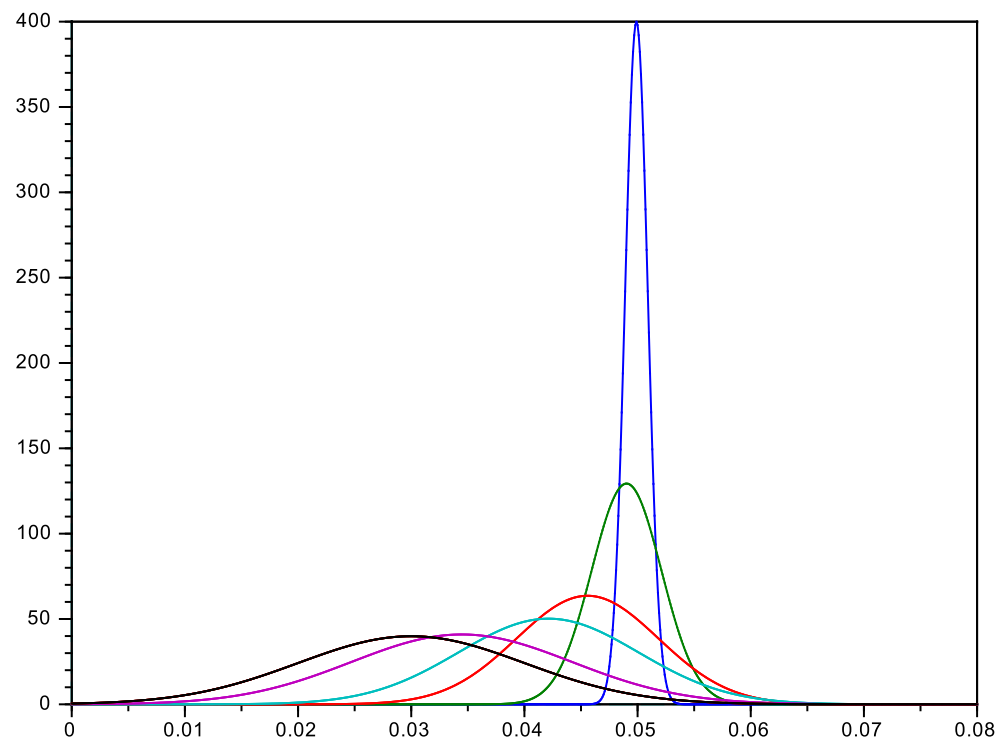
- Hustoty konvergujú k určitému limitnému rozdeleniu
- Pre $t \rightarrow \infty$ platí:

$$\mathbb{E}[r_t | r_0] = r_0 e^{-\kappa t} + (1 - e^{-\kappa t})\theta \rightarrow \theta$$

$$\mathbb{D}[r_t | r_0] = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t}) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\kappa}$$

Fokker-Planckova PDR: limitné rozdelenie

- PRÍKLAD: Ornestein-Uhlenbeckov proces - hustoty pre dané x_0 a niekoľko časov t (z predchádzajúceho obrázka) a limitná hustota (čierna čiara):



Fokker-Planckova PDR: limitné rozdelenie

- Limitné rozdelenie netreba počítať z podmieneného rozdelenia (to je často zložité)
- Priamy výpočet z Fokker-Planckovej rovnice:

- vieme, že hustota $g(x, t)$ v čase t spĺňa PDR

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 g) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu g)$$

- uvažujme limitu $f(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} g(x, t)$
- táto limita potom spĺňa stacionárnu Fokker-Planckovu rovnicu:

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (\sigma^2 f) - \frac{d}{dx} (\mu f)$$

s normovacou podmienkou (aby to bola hustota náhodnej premennej) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Fokker-Planckova PDR: limitné rozdelenie

PRÍKLAD: CIR model pre úrokové miery

- Pripomeňme si stochastickú diferenciálnu rovnicu pre úrokovú mieru: $dx = \kappa(\theta - x)dt + \sigma\sqrt{x}dw$
- Nech $2\kappa > \sigma^2$ (potom sa nenadobúda nulová hodnota)
- Hustota $g(x, t)$ v čase t spĺňa PDR

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 g) - \frac{\partial}{\partial x} (\kappa(\theta - x)g)$$

so začiatočnou podmienkou

$$g(x, 0) = \delta(x - x_0)$$

- Existuje explicitné vyjadrenie pre $g(x, t)$, ale je pomerne komplikované (necentrálne chí-kvadrát rozdelenie, resp. modifikovaná Besselova funkcia druhého druhu)

Fokker-Planckova PDR: limitné rozdelenie

PRÍKLAD - POKRAČOVANIE:

- Explicitné riešenie (nebudeme dokazovať):

$$g(x, t) = c e^{-u-v} \left(\frac{v}{u}\right)^{q/2} I_q(2\sqrt{uv}),$$

(pre $x > 0$, inak $g(x, t) = 0$), pričom I_q je modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu rádu q a

$$c = \frac{2\kappa}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa t})}$$

$$u = c x_0 e^{-\kappa t}$$

$$v = c x$$

- Limitné rozdelenie sa však dá nájsť aj bez znalosti tohto podmieneného rozdelenia

Fokker-Planckova PDR: limitné rozdelenie

PRÍKLAD - POKRAČOVANIE:

- Limitná hustota $f(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} g(x, t)$ spĺňa stacionárnu Fokker-Planckovu rovnicu: (pre $x > 0$, inak je nulová, keďže proces nenadobúda záporné hodnoty)

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (\sigma^2 x f) - \frac{d}{dx} (\kappa(\theta - x) f)$$

- Zintegrovaním dostaneme:

$$f(x) = K x^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} - 1} e^{-\frac{2\kappa}{\sigma^2} x}$$

- Konštantu K určíme z podmienky $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- Všimnime si, že sme dostali hustotu gama rozdelenia