

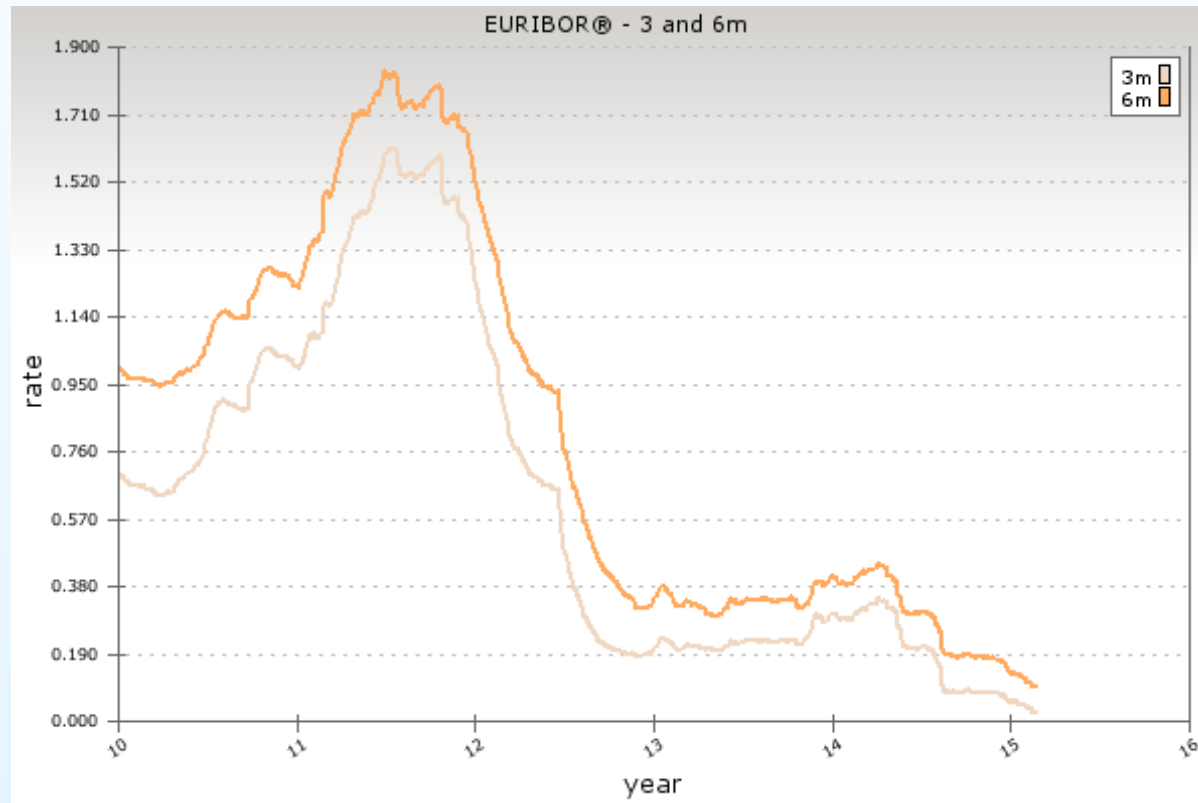
Ceny dlhopisov v short rate modeloch

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Úrokové miery

- Doteraz sme modelovali okamžitú úrokovú mieru
- Teraz: úrokové miery s ostatnými splatnosťami



<http://www.euribor-ebf.eu/>

Dlhopisy

- Dlhopis
 - cenný papier, ktorý v stanovenom čase (naz. sa **splatnosť** alebo **maturita** dlhopisu) vyplatí dohodnutú sumu - nech je to 1 USD
 - $P(t, T)$ = cena dlhopisu v čase t , ak jeho maturita je v čase T
 - $R(t, T)$ = úroková miera s maturitou T v čase t
 - Platí:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \Rightarrow R(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T - t}$$

- V short rate modeloch: cena dlhopisu P je riešením PDR,
 $P = P(r, t, T)$

Odvođenje PDR pre dlhopis

- SDR pre short rate:

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dw$$

- Uvažujme dlhopis s maturitou T , potom Itóova lema dáva:

$$dP = \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right)}_{\mu_B(t, r)} dt + \underbrace{\sigma \frac{\partial P}{\partial r}}_{\sigma_B(t, r)} dw$$

- Portfólio: 1 dlhopis s maturitou T_1 a Δ dlhopisov s maturitou T_2 ; jeho hodnota:

$$\Pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2)$$

Odvodenie PDR pre dlhopis

- Zmena hodnoty portfólia:

$$\begin{aligned}d\Pi &= dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2) \\ &= (\mu_B(r, t, T_1) + \Delta\mu_B(r, t, T_2)) dt \\ &\quad + (\sigma_B(r, t, T_1) + \Delta\sigma_B(r, t, T_2)) dw\end{aligned}$$

- Eliminujeme náhodnosť tým, že zvolíme

$$\Delta = -\frac{\sigma_B(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_2)},$$

potom

$$d\Pi = \left(\mu_B(t, r, T_1) - \frac{\sigma_B(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_2)} \mu_B(t, r, T_2) \right) dt$$

Odvođenje PDR pre dlhopis

- Výnos bezrizikového portfólia musí byť r (okamžitá úroková miera), t.j. $d\Pi = r\Pi dt$:

$$\mu_B(t, r, T_1) - \frac{\sigma_B(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_2)} \mu_B(t, r, T_2) = r\Pi$$

- Dosadíme:

$$\begin{aligned} & \mu_B(t, r, T_1) - \frac{\sigma_B(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_2)} \mu_B(t, r, T_2) \\ &= r \left(P(t, r, T_1) - \frac{\sigma_B(t, r, T_1)}{\sigma_B(t, r, T_2)} P(t, r, T_2) \right) \end{aligned}$$

Odvođenje PDR pre dlhopis

- Maturity T_1, T_2 boli ľubovoľné, preto musí existovať $\lambda = \lambda(r, t)$ tak, že pre každé t :

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_B(r, t, T)}$$

- Funkcia $\lambda = \lambda(r, t)$ nezávisí od maturity T ; nazýva sa trhov cena rizika
- Zaver: PDR pre cenu dlhopisu $P = P(r, t)$ je

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r, t)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0.$$

pre $r \in (0, \infty), t \in (0, T)$ s koncovou podmienkou
 $P(r, T) = 1$ pre $r \in (0, \infty)$

Explicitné riešenia

- Explicitné riešenie pre cenu dlhopisu:
 - Vašíčkov model s trhovou cenou rizika $\lambda(r, t) = \lambda$
 - CIR model s trhovou cenou rizika $\lambda(r, t) = \lambda\sqrt{r}$
- Riešenie hľadáme v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

kde $\tau = T - t$

- Dosadíme do PDR pre cenu dlhopisu \Rightarrow dostaneme systém obyčajných diferenciálnych rovníc pre funkcie $A(\tau), B(\tau) \Rightarrow$ tento systém sa dá explicitne vyriešiť

Vašíčkov model

- Systém ODR:

$$\begin{aligned} -\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2}AB^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma)AB &= 0 \\ \dot{B} + \kappa B - 1 &= 0 \end{aligned}$$

so začiatočnými podmienkami $A(0) = 1, B(0) = 0$

- Funkcie A, B :

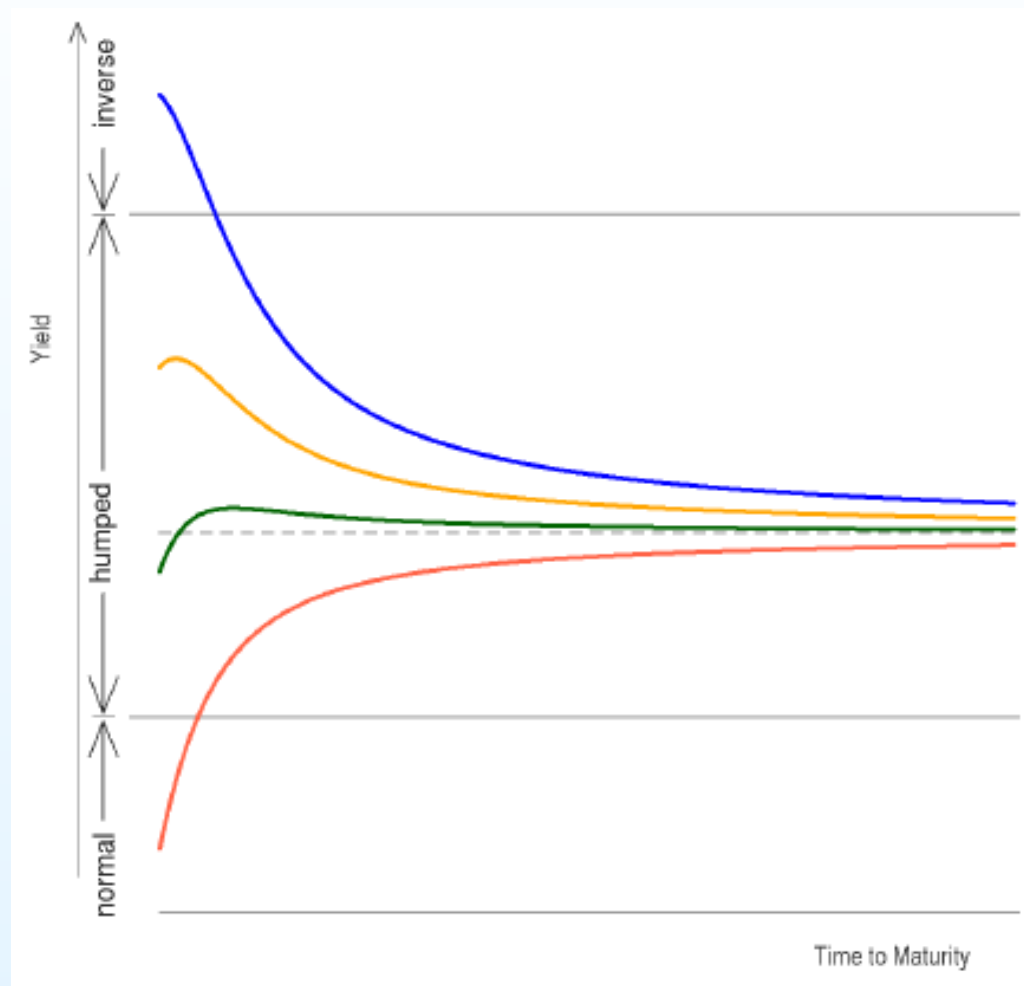
$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa},$$

$$\log A(\tau) = \left[\frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}) - \tau \right] R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa\tau})^2,$$

kde $R_\infty = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$

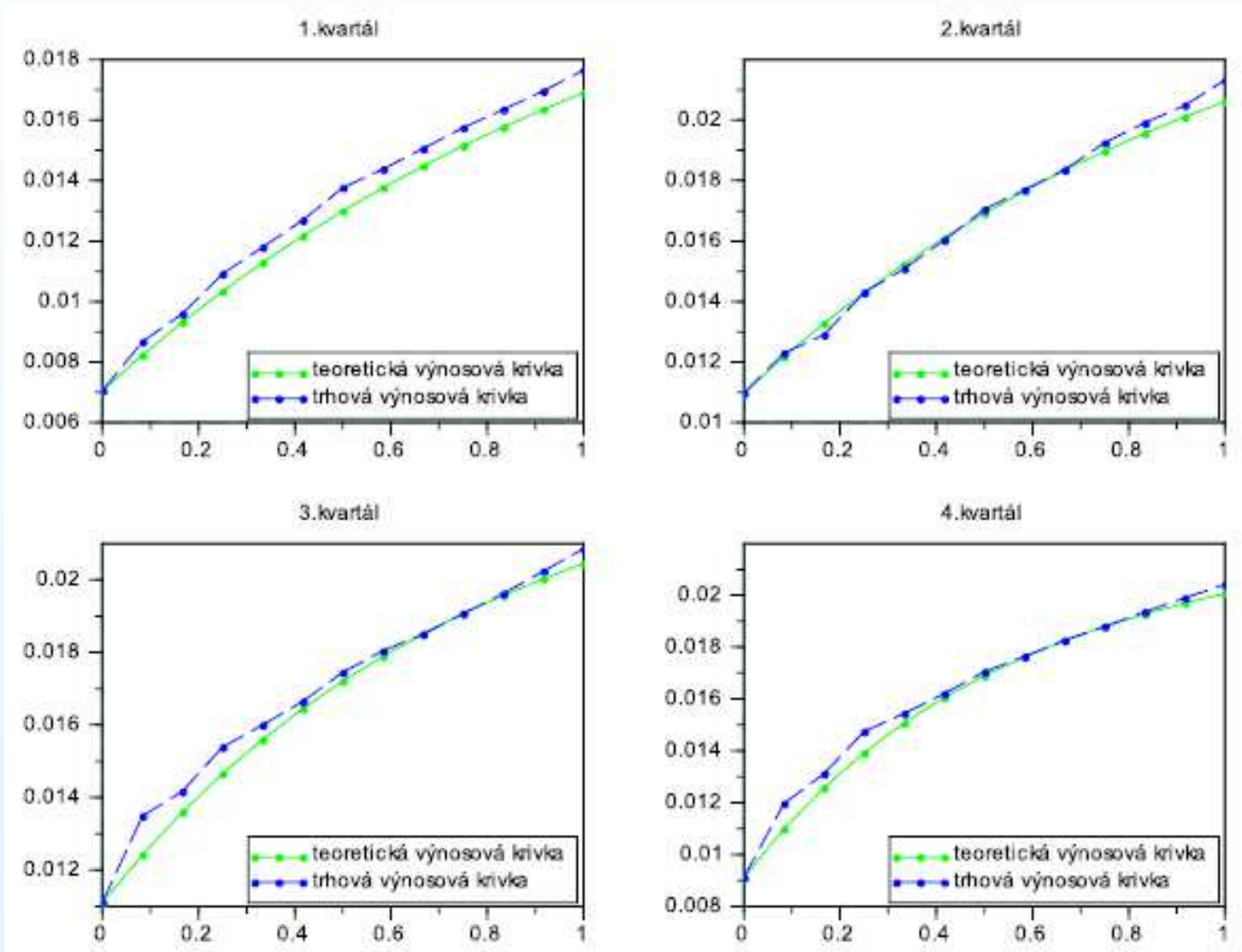
- Platí: R_∞ je limita výnosových kriviek

Tvary výnosových kriviek



M. Keller-Ressel, T. Steiner: **Yield Curve Shapes and the Asymptotic Short Rate Distribution in Affine One-Factor Models** - tvary kriviek vo všeobecnom 1-fakt. modeli

Kalibrácia: Euribor, 2011

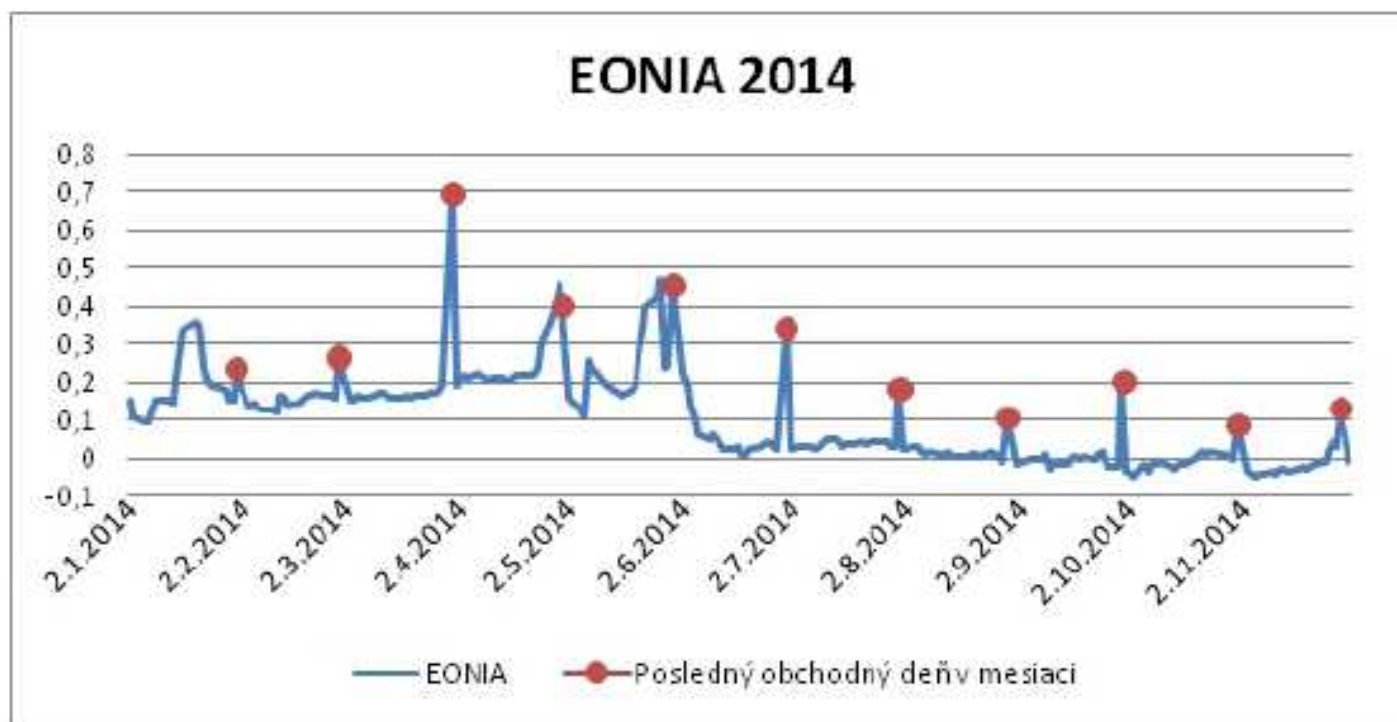


Simona Chattová, diplomová práca (2013)

Čo má byť short rate?

- V predchádzajúcom príklade 1W Euribor; prečo nie overnight (Eonia):

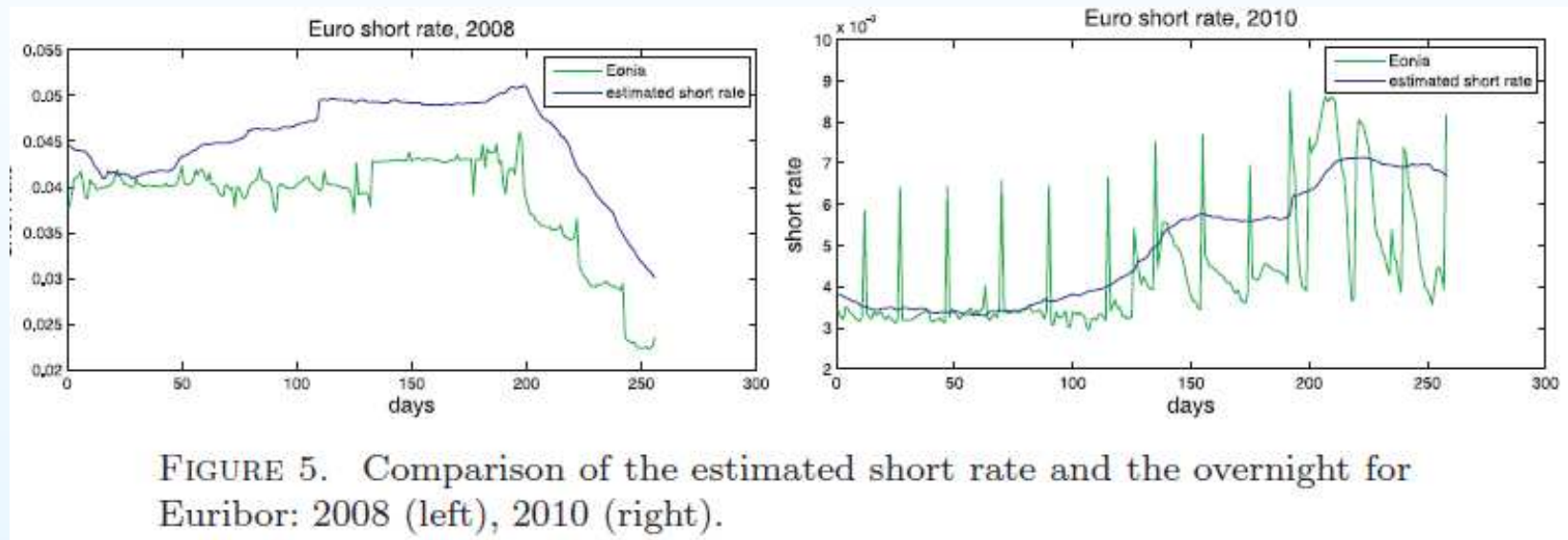
Obr. 2: Výška sadzby EONIA v priebehu roku 2014 a vyznačené konce mesiacov (Zdroj: EMMI)



Juraj Ivan, bakalárska práca (2015)

Čo má byť short rate?

- Odhadovanie short rate spolu s parametrami Vašíčkovho modelu:



J. Halgašová, B. Stehlíková, Z. Bučková: **Estimating the short rate from the term structures in the Vasicek model**, Tatra Mountains Mathematical Publications 61 (2014), 87-104

CIR model

- Systém ODR:

$$\begin{aligned}\dot{A} + \kappa\theta AB &= 0, \\ \dot{B} + (\kappa + \lambda\sigma)B + \frac{\sigma^2}{2}B^2 - 1 &= 0,\end{aligned}$$

so začiatočnými podmienkami $A(0) = 1, B(0) = 0$

- Funkcie A, B :

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\phi\tau} - 1)}{(\psi + \phi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi},$$

$$A(\tau) = \left(\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\tau/2}}{(\phi + \psi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}},$$

kde $\psi = \kappa + \lambda\sigma, \phi = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2} = \sqrt{(\kappa + \lambda\sigma)^2 + 2\sigma^2}$.

Všeobecný jednofaktorový model

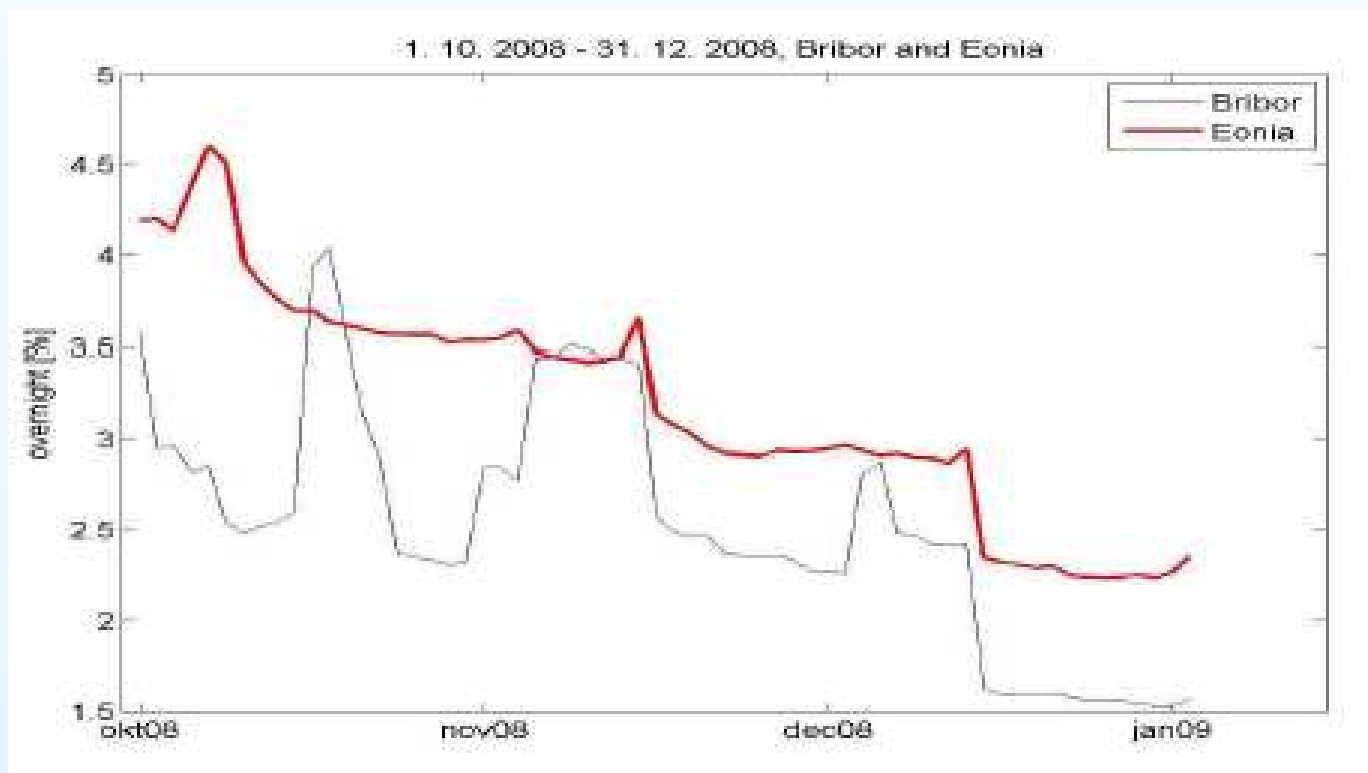
- Vo všeobecnosti neexistuje explicitné riešenie
- Numerické riešenie PDR, analytické aproximáčné formuly, Monte Carlo simulácie
- Napríklad (so zameraním na môj výskum v tejto oblasti):
 - Y. Choi, T. Wirjanto, : **An analytic approximation formula for pricing zero- coupon bonds**, Finance Research Letters 4 (2007), pp. 116-126.
 - B. Stehlíková, D. Ševčovič: **Approximate formulae for pricing zero-coupon bonds and their asymptotic analysis**. International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 6(2) 2009, 274-283.
 - T. Chernogorova, B. Stehlíková: **A Comparison of Asymptotic Analytical Formulae with Finite-Difference Approximations for Pricing Zero Coupon Bond**. Numerical Algorithms 59 (4), 2012, pp. 571-588.
 - B. Stehlíková, L. Capriotti: **An Effective Approximation for Zero Coupon Bonds and Arrow-Debreu Prices in the Black-Karasinski Model**, International Journal of Theoretical and Applied Finance 17, 2014, 1450037

Viacfaktorové modely

- Motivácia:
 - výnosová krivka nie je jednoznačne určená hodnotou okamžitej úrokovej miery
 - viac možných tvarov výnosových kriviek
 - samotné modelovanie okamžitej úrokovej miery

Konvergenčné modely

- Domáca úroková miera pred vstupom do menovej únie je ovplyvňovaná úrokovou mierou v menovej únii
- Ukážka: Slovensko pred prijatím eura:



Konvergenčné modely

- Prvý model:

T. Corzo and E. S. Schwartz: **Convergence within the European Union: Evidence from interest rates**. Econom. Notes 29, 2000, 243-268.

- Tieto modely sú predmetom výskumu na katedre, napr.

Z. Zíková, B. Stehlíková: **Convergence model of interest rates of CKLS type**. Kybernetika 48, 2012, 567-586

Short rate ako súčet dvoch faktorov

- Okamžitá úroková miera ako súčet dvoch faktorov, každý z nich je modelovaný stochastickou diferenciálnou rovnicou (napr. Vašíčkovho alebo CIR typu)

- Aplikácia:

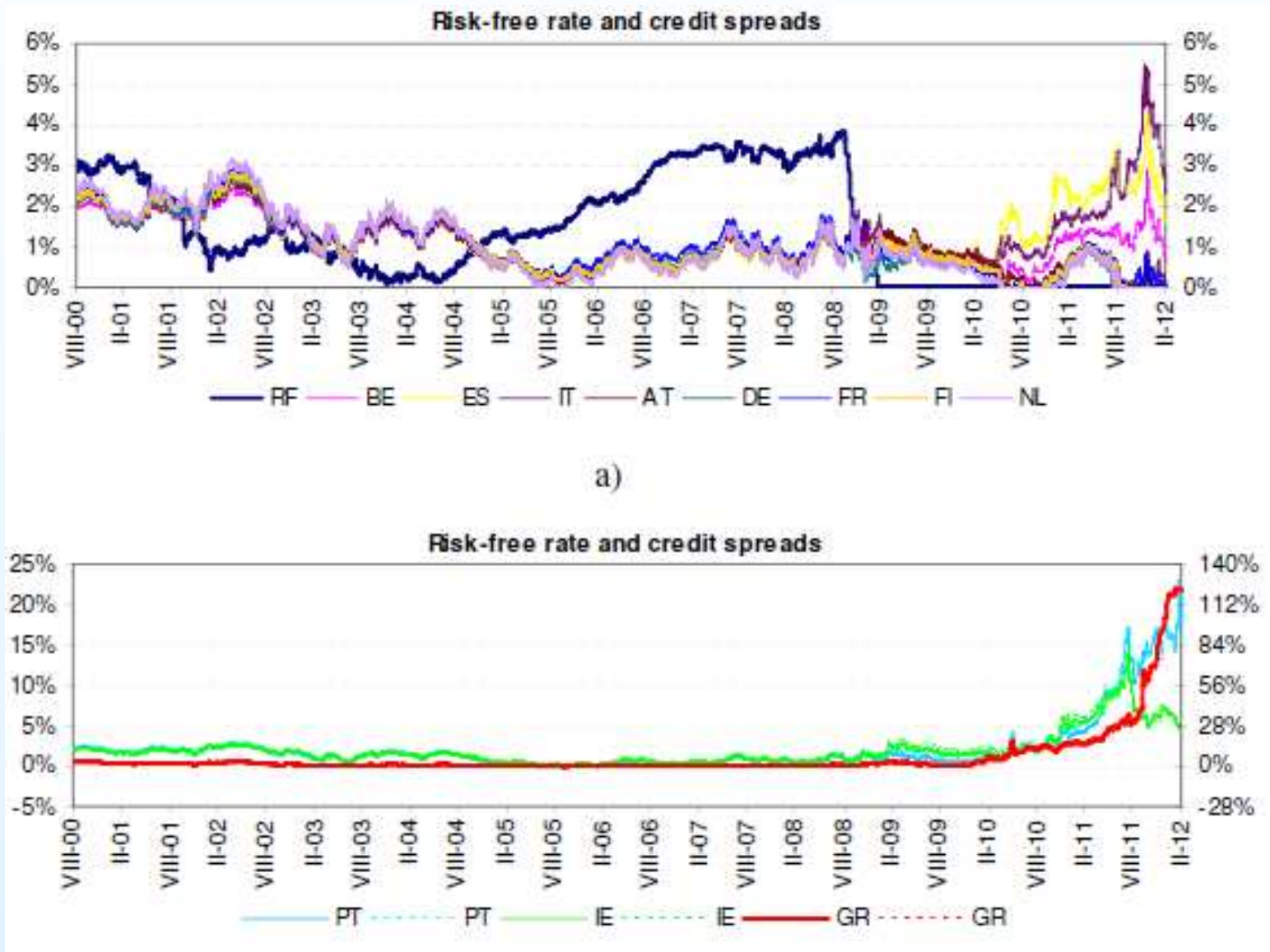
Ľ. Šesták: **Mathematical Analysis and Calibration of a Multifactor Panel**

Model for Credit Spreads and Risk-free Interest Rate , dizertačná práca, FMFI UK, 2012

$$r = r^{rf} + r^{CS},$$

kde r^{rf} je risk-free rate (spoločná pre všetky štáty) a r^{CS} je credit spread (pre každý štát samostatne)

Short rate ako súčet dvoch faktorov



Dvojfaktorové modely

- Model pre okamžitú úrokovú mieru: $r = r(x, y)$, pričom x, y sú faktory spĺňajúce systém

$$dx = \mu_x(x, y, t)dt + \sigma_x(x, y, t)dw$$

$$dy = \mu_y(x, y, t)dt + \sigma_y(x, y, t)dw$$

korelácia: $\mathbb{E}[dx dy] = \rho dt$

- Cena dlhopisu: $P = P(x, y, t)$
- PDR pre $P(x, y, t)$: znovu portfólio z dlhopisov s rôznymi maturitami (teraz tromi), také počty dlhopisov, aby portfólio bolo nenáhodné