

*Numerické metódy: PSOR algoritmus  
na oceňovanie amerických opcí*

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

# Numerické riešenie

- Pripomeňme si (záver slajdov [09\\_us\\_opcie.pdf](#)):

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (u(x, \tau) - g(x, \tau)) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0, \quad u(x, \tau) - g(x, \tau) \geq 0$$

- Diskretizácia ako pri implicitnej metóde pre európske opcie:

$$\mathbf{A}u^{j+1} \geq u^j + b^j, \quad u^{j+1} \geq g^{j+1} \quad \text{pre } j = 0, 1, \dots, m - 1,$$
$$(\mathbf{A}u^{j+1} - u^j - b^j)_i (u^{j+1} - g^{j+1})_i = 0 \quad \text{pre každé } i$$

# Numerické riešenie

- Matica  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{b}$  zostávajú rovnaké:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + 2\gamma & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & & -\gamma & 1 + 2\gamma & -\gamma \\ 0 & \dots & 0 & -\gamma & 1 + 2\gamma \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}^j = (\gamma\phi^{j+1}, 0, \dots, 0, \gamma\psi^{j+1})^T$$

kde  $\gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2}$

# PSOR metóda

- Na každej časovej vrstve teda riešime úlohu typu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u &\geq b, \quad u \geq g, \\ (\mathbf{A}u - b)_i (u_i - g_i) &= 0 \quad \text{pre každé } i. \end{aligned}$$

- Definujme postupnosť

$$u_i^{p+1} = \max \left[ \frac{\omega}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j<i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j>i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i^p, g_i \right]$$

- Projektovaný SOR → označuje sa ako PSOR metóda alebo PSOR algoritmus

# Konvergenca algoritmu k riešeniu

- Postupnosť  $u^p$  konverguje k nejakej limite  $u$  - dokáže sa Banachovou vetou o pevnom bode - naštudovať samostatne [Ševčovič, Stehlíková, Mikula: **Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov**, str. 182-183]
- Táto limita je riešením:
  - $u_i^{p+1} \geq g_i \Rightarrow$  aj limita spĺňa  $u_i \geq g_i$
  - $u_i^{p+1} \geq \frac{\omega}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j < i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j > i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i^p \Rightarrow$  aj limita spĺňa  $u_i \geq \frac{\omega}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j < i} A_{ij} u_j - \sum_{j > i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i$   
využijeme  $A_{ii} > 0, \omega > 0 \rightarrow$  dostaneme  $(Au)_i \geq b_i$
  - ak  $u_i > g_i$ , tak od určitého indexu  $p_0$  je  $u_i^p > g_i$ , pre tieto indexy platí:

## Konvergenca algoritmu k riešeniu

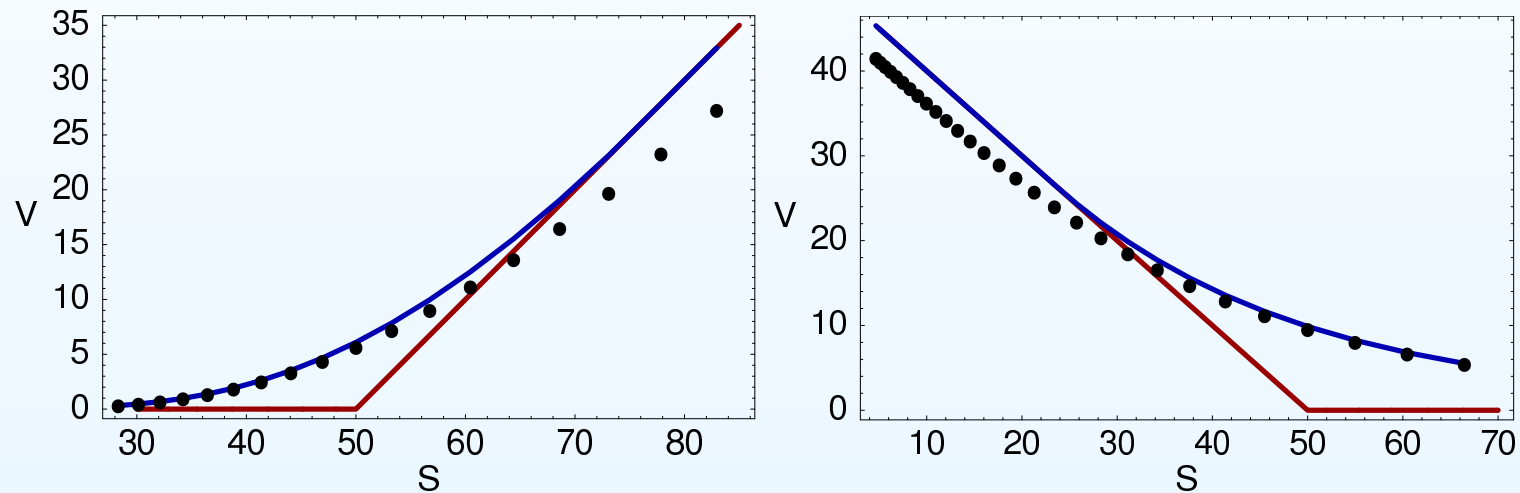
---

$$u_i^{p+1} = \frac{\omega}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j < i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j > i} A_{ij} u_j^p \right) + (1 - \omega) u_i^p,$$

v limite pre  $p \rightarrow \infty$  dostaneme  $(Au)_i = b_i \Rightarrow$  podmienka  $(Au - b)_i (u_i - g_i) = 0$  je splnená

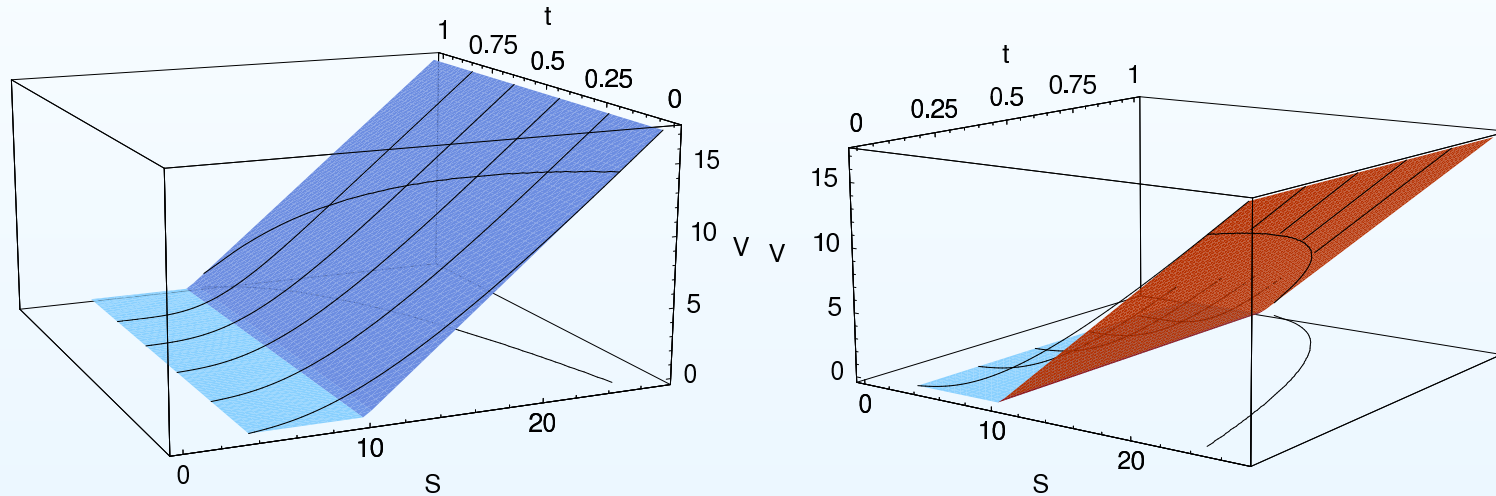
# Ukážka numerických výsledkov

- Oceňovanie americkej call a put opcie (na porovnanie bodkami cena európskej opcie)



# Ukážka numerických výsledkov

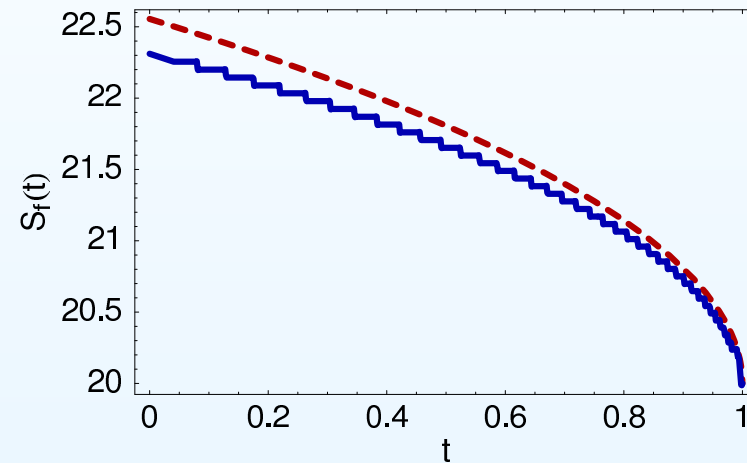
- 3D graf s vyznačenou voľnou hranicou pre call opciu:





## Ukážka numerických výsledkov

- Numerický výpočet voľnej hranice a porovnanie s "odmocninovou" aproximačnou formulou



# Ukážka numerických výsledkov

- M. Lauko, D. Ševčovič: **Comparison of numerical and analytical approximations of the early exercise boundary of American put options**, ANZIAM journal 51, 2010, 430-448.

Porovnanie aproximačných formúl pre put opciu:

