# *III. Black-Scholesov model, oceňovanie opcií*

Beáta Stehlíková
Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

# Obsah

- Black-Scholesov model:
  - Predpokladajme, že cena akcie $S$ sa riadi geometrickým Brownovym pohybom

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

  + ďalšie predpoklady (o chvíľu)
  - Odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu
- Dva spôsoby odvodenia:
  - od Blacka a Scholesa
  - od Mertona
- Explicitné riešenie pre európsku call a put opciu

# Predpoklady

- Ďalšie predpoklady (okrem GBP):
  - konštantná bezriziková úroková miera $r$
  - žiadne transakčné náklady
  - dá sa kupovať/predávať ľubovoľné množstvo (aj neceločíselné) akcií, rovnako hotovosť
  - žiadne obmedzenia na *short selling*
  - opcie sú európskeho typu
- Najskôr uvažujme akciu, ktorá nevypláca dividendy

# Odvodenie I. - podľa Blacka a Scholesa

- Označenie:
  $S =$ cena akcie, $t =$ čas
  $V = V(S,t) =$ cena opcie
- Portfólio: 1 opcia, $\delta$ akcií
  $P =$ hodnota portfólia: $P = V + \delta S$
- Zmena hodnoty portfólia: $dP = dV + \delta dS$
- Z predpokladov: $dS = \mu S dt + \sigma S dw,$ Z Itóovej lemy:
  $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw$
- Teda:

$$
\begin{aligned}
dP &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S\right) dt \\
&\quad + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \delta \sigma S\right) dw
\end{aligned}
$$

# Odvodenie I. - podľa Blacka a Scholesa

- Eliminujeme náhodnosť: $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$
- Nenáhodné portfólio $\Rightarrow$ jeho hodnota musí byť rovnaká ako keby sme mali peniaze uložené na účte s úrokom $r$: $dP = rPdt$
- Rovnosť dvoch vyjadrení pre $dP$ a dosadenie $P = V + \delta S$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

# Dividendy v odvodení Blacka a Scholesa

- Majme spojitú dividendovú mieru $q$ - držanie akcie v hodnote $S$ na intervale dĺžky $dt$ prináša dividendy $qSdt$
- V tomto prípade je zmena hodnoty portfólia $dP = dV + \delta dS + \delta qSdt$
- Rovnakým postupom ako predtým dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

# Odvodenie podľa Mertona - motivácia

- Problém s predchádzajúcim odvodením:
  - máme portfólio pozostávajúce z 1 opcie a $\delta$ akcií
  - vypočítame jeho hodnotu a zmenu hodnoty:

$$
\begin{aligned}
P &= V + \delta S, \\
dP &= dV + \delta\, dS,
\end{aligned}
$$

    teda považujeme $\delta$ za konštantu
  - dostaneme však $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$

# Odvodenie II. - podľa Mertona

- Portfólio z opcií, akcií a hotovosti s vlastnosťami:
  - v každom čase má portfólio nulovú hodnotu
  - je samofinancované
- Označenie:
  $Q_S =$ počet akcií, každá má hodnotu $S$
  $Q_V =$ počet opcií, , každá má hodnotu $V$
  $B =$ hotovosť, ktorá je úročená úrokovou mierou $r$

  $dQ_S =$ zmena v počte akcií
  $dQ_V =$ zmena v počte opcií
  $\delta B =$ zmena hotovosti spôsobená kupovaním/predávaním akcií a opcií

# Odvodenie II. - podľa Mertona

- Mathematická formulácia požadnovaných vlastností:
  - nulová hodnota: $S\,Q_S + V\,Q_V + B = 0$ (1)
  - samofinancovanosť:
    $(S + dS)\,dQ_S + (V + dV)\,dQ_V + \delta B = 0$ (2)
- Zmena hotovosti: $dB = rB\,dt + \delta B$
- Diferencujeme (1):

$$
\begin{aligned}
0 &= d\,(SQ_S + VQ_V + B) = d\,(SQ_S + VQ_V) + \overbrace{dB}^{rB\,dt+\delta B} \\
0 &= \overbrace{SdQ_S + dSdQ_S + VdQ_V + dVdQ_V + \delta B}^{=0} \\
&\quad +Q_S dS + Q_V dV + rB\,dt \\
0 &= Q_S dS \;+\; Q_V dV \;\; \overbrace{-\,r(SQ_S + VQ_V)}^{rB}\,dt.
\end{aligned}
$$

# Odvodenie II. - podľa Mertona

- vydelíme $Q_V$ a označíme $\Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}$:
  $dV - rV\,dt - \Delta(dS - rS\,dt) = 0$
- Máme $dS$ z predpokladu o GBP a $dV$ z Itóovej lemy
- Zvolíme $\Delta$ (teda pomer počtu akcií a opcií) tak, aby sme eliminovali náhodnosť (koeficient pri $dw$ bude nula)
- Dostaneme rovnakú PDR ako predtým:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

# Dividendy v Mertonovom odvodení

- Majme spojitú dividendovú mieru $q$.
- Dividendy spôsobia nárast hotovosti $\Rightarrow$ zmena hotovosti je $dB = rB\,dt + \delta B + qSQ_S dt$
- Rovnakým postupom dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

# Black-Scholesova PDR: zhrnutie

- Matematická formulácia modelu:
  Nájdite riešenie $V(S,t)$ parciálnej diferenciálnej rovnice (Black-Scholesovej PDR)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

  ktorá platí pre $S > 0, t \in [0,T)$.
- Doteraz sme nevyužili to, že oceňujeme práve opciu $\Rightarrow$ PDR platí pre každý derivát, ktorý má v danom čase $T$ payoff závislý od ceny akcie v tomto čase
- Typ derivátu určuje koncovú podmienku v čase $T$
- Teda: $V(S,T) =$ payoff derivátu

# Black-Scholesova PDE: jednoduché riešenia

JEDNODUCHÉ "DERIVÁTY":

- Ak oceniť deriváty s nasledovnými payoffmi:
  - $V(S,T) = S$ $\rightarrow$ je to vlastne akcia $\rightarrow V(S,t) = S$
  - $V(S,T) = E$ $\rightarrow$ s istotou dostaneme hotovosť $E$ $\rightarrow$ $V(S,t) = Ee^{-r(T-t)}$

  - dosadením do PDR vidíme, že sú to naozaj riešenia

CVIČENIA:

- Nájdite cenu derivátu s payoffom $V(S,T) = S^n$, kde $n \in \mathbb{N}$ .
  NÁVOD: Hľadajte riešenie v tvare $V(S,t) = A(t)S^n$
- Nájdite všetky riešenia Black-Scholesovej PDR, ktoré nezávisia od času, teda $V(S,t) = V(S)$

# Black-Scholesova PDR: binárna opcia

- Uvažujme binárnu opciu, ktorá vyplatí 1 USD ak je v čase expirácie cena akcie vyšia ako $E$, inak nebyplatí nič
- V tomto prípade

$$V(S,T) = \begin{cases} 1 & \text{ak } S > E \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Hlavnou myšlienkou je transformácia Black-Scholesovej PDE na rovnicu vedenia tepla
- Transformácie sú nezávislé od typu derivátu; ten ovplyvňuje iba začiatočnú podmienku RVT

# Black-Scholesova PDR: transformácie

## FORMULÁCIA PROBLÉMU

- Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

  ktorá platí pre $S > 0, t \in [0, T)$.

- Koncová podmienka $V(S,T) =$ payoff derivátu for $S > 0$

# Black-Scholesova PDR: transformácie

KROK 1:

- Transformácia $x = \ln(S/E) \in \mathbb{R}$, $\tau = T - t \in [0, T]$ a nová funkcia $Z(x,\tau) = V(Ee^x, T - \tau)$
- PDR pre $Z(x,\tau)$, $x \in \mathbb{R}, \tau \in [0,T]$:

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0,$$

$$Z(x,0) = V(Ee^x, T)$$

KROK 2:

- Transformácia na rovnicu vedenia tepla
- Nová funkcia $u(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} Z(x,\tau)$, pričom konštanty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sa určia tak, aby PDR pre $u$ bola RVT

# Black-Scholesova PDR: transformácie

- PDR pre $u$:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0\,,$$

$$u(x,0) = e^{\alpha x} Z(x,0) = e^{\alpha x} V(Ee^x, T),$$

kde

$$A = \alpha\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} - r,\ B = (1+\alpha)r - \beta - \frac{\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2}{2}\,.$$

- Aby sme dostali $A = B = 0$, zoberieme

$$\alpha = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2},\ \beta = \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r^2}{2\sigma^2}$$

# Black-Scholesova PDR: transformácie

KROK 3:

- Riešenie $u(x,\tau)$ PDR $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ je dané Greenovou formulou

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} u(s,0)\, ds\,.$$

- Vypočítame integrál a spravíme spätné substitúcie $u(x,\tau) \to Z(x,\tau) \to V(S,t)$

# Black-Scholesova PDR: binárna opcia (pokr.)

- Transformácie z predchádzajúcich slajdov
- Dostaneme RVT $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ so začiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = e^{\alpha x} V(Ee^x, T) = \begin{cases} e^{\alpha x} & \text{ak } Ee^x > E \\ 0 & \text{inak} \end{cases} = \begin{cases} e^{\alpha x} & \text{ak } x > 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Riešenie $u(x,\tau)$:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} e^{\alpha s} ds = \ldots = e^{\alpha x + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\alpha^2} N\left(\frac{x+\sigma^2\tau\alpha}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

kde $N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$ je distribučná funkcia N(0,1) rozdelenia

# Black-Scholesova PDR: binárna opcia (pokr.)

- Cena opcie $V(S,t)$:

$$V(S,t) = e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

kde $d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

# Black-Scholesova PDR: call opcia

- Teraz:
$$V(S,T) = \max(0, S-E) = \begin{cases} S-E & \text{ak } S>E \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$
- Rovnaká postupnosť transformácií, začiatočná podmienka pre RVT:
$$u(x,0) = \begin{cases} e^{\alpha x}(Ee^x - E) & \text{ak } x>0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$
a podobný výpočet integrálu
- Cena opcie:
$$V(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$
kde $N$ je distribučná funkcia N(0,1) a
$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

# Black-Scholesova PDR: call opcia

DOMÁCA ÚLOHA:
Vyriešte Black-Scholesovu PDR pre call opciu na akciu, ktorá vypláca spojité dividendy a upravte riešenie do tvaru

$$V(S,t) = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

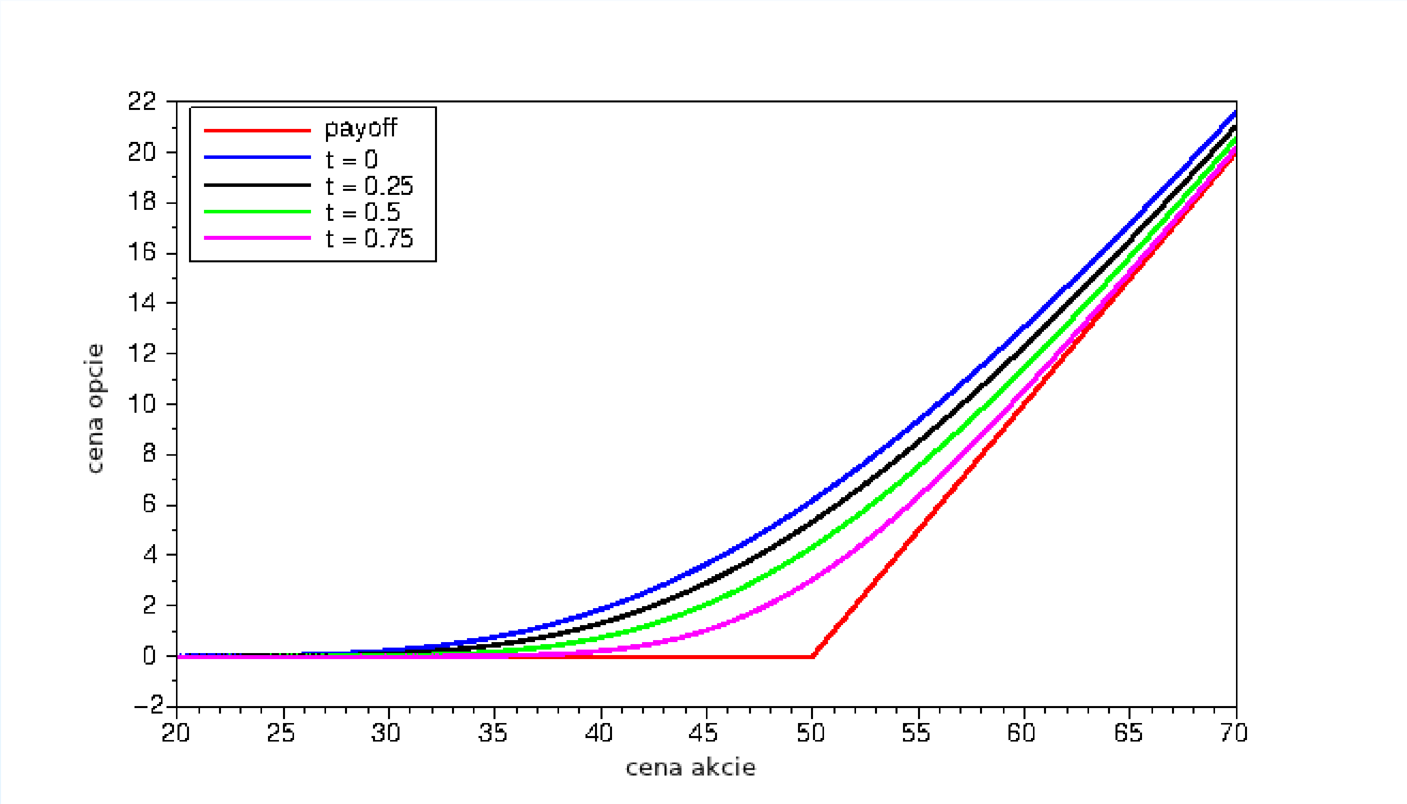
kde $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi$ je distribučná funkcia N(0,1) a

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{E} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

POZNÁMKA: PDR je tu iná, takže treba zmeniť transformácie (ale postup zostáva rovnaký)

# Black-Scholesova PDR: call opcia

Payoff (teda koncová podmienka pre $t = T = 1$) a riešenie $V(S,t)$ pre niekoľko časov $t$:



# Black-Scholesova PDR: put opcia

## Formulácia problému

- Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

  ktorá platí pre $S > 0, t \in [0, T]$.

- Koncová podmienka:

$$V(S, T) = \max(0, E - S)$$

  pre $S > 0$

# Black-Scholesova PDR: put opcia

POSTUP I.

- Rovnaká postupnosť výpočtom ako v prípade call opcie

POSTUP II.

- Využijeme linearitu Black- Scholesovej PDR a riešenie pre call opciu, ktoré už máme

Ukážeme aplikáciu druhého postupu

# Black-Scholesova PDR: put opcia

- Pripomeňme si:

$$-[call\, payoff] + [put\, payoff] + [stock\ price] = E$$

- Preto:

$$[put\ payoff] = [call\ payoff] - S + E$$

- Black-Scholesova PDE je lineárna: lineárna kombinácia riešení je znovu riešením

# Black-Scholesova PDR: put opcia

- Pripomeňme si riešenia pre $V(S,T) = S$ a $V(S,T) = E$ (s. 13):

| koncová podmienka | riešenie |
|---|---|
| $\max(0, S-E)$ | $V^{call}(S,t)$ |
| $S$ | $S$ |
| $E$ | $Ee^{-r(T-t)}$ |

- Z linearity:

| koncová podmienka | riešenie |
|---|---|
| $\max(0, S-E) - S + E$ | $V^{call}(S,t) - S + Ee^{-r(T-t)}$ |

- Keďže $[put\ payoff] = \max(0, S-E) - S + E$, dostaneme

$$V^{put}(S,t) = V^{call}(S,t) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

## Riešenie pre put opciu

- Riešenie

$$V^{put}(S,t) = V^{call}(S,t) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

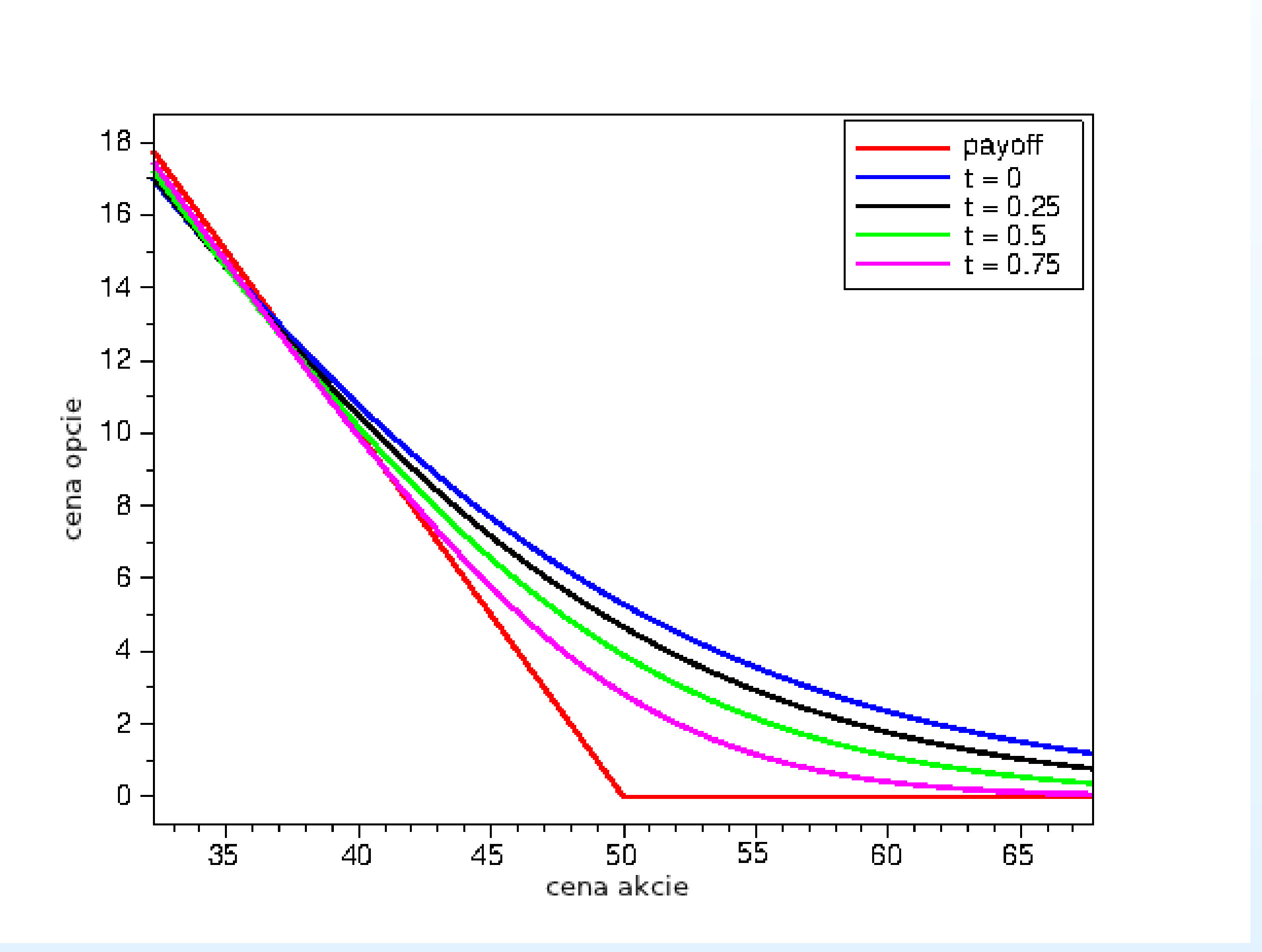
sa dá napísať v podobnom tvare ako riešenie pre call opciu:

$$V^{ep}(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

kde $N, d_1, d_2$ sú rovnaké ako predtým

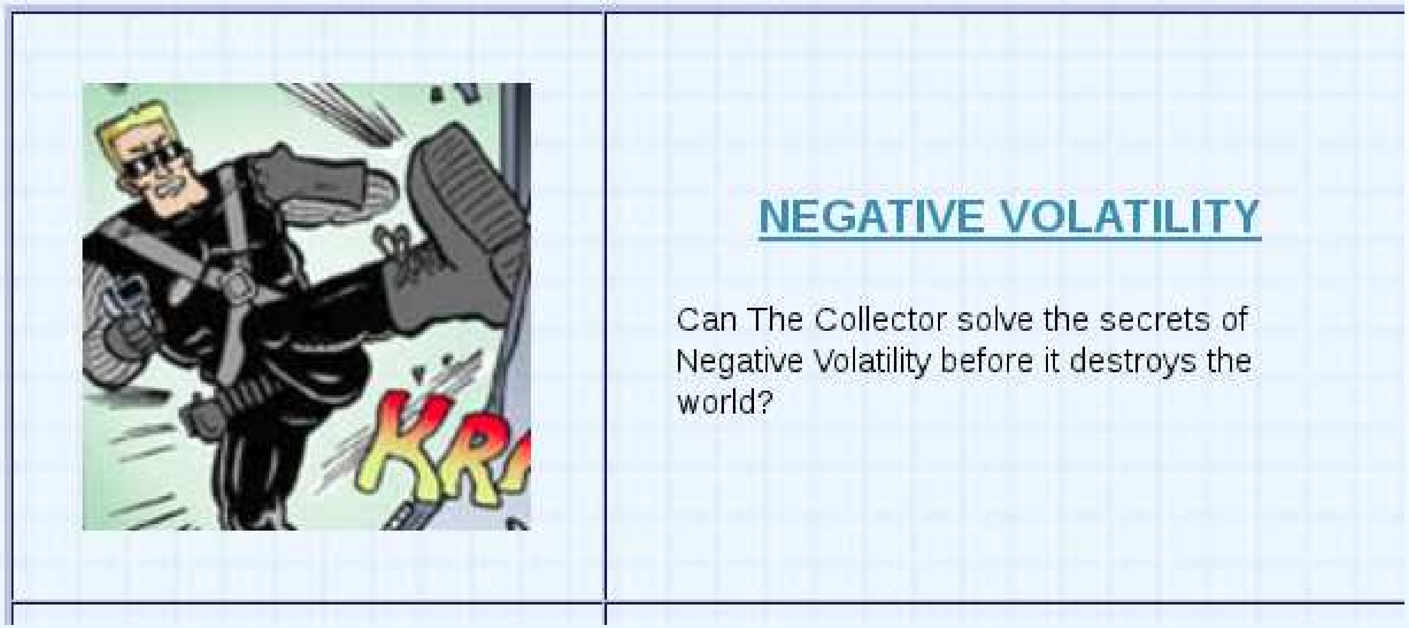
# Put opcia - príklad

Payoff (teda koncová podmienka v čase $t = T = 1$) a riešenie $V(S,t)$ pre niekoľko časov $t$:



# Put opcia - alternatívne riešenie

Komiks o zápornej volatilite na stránke Espena Hauga:



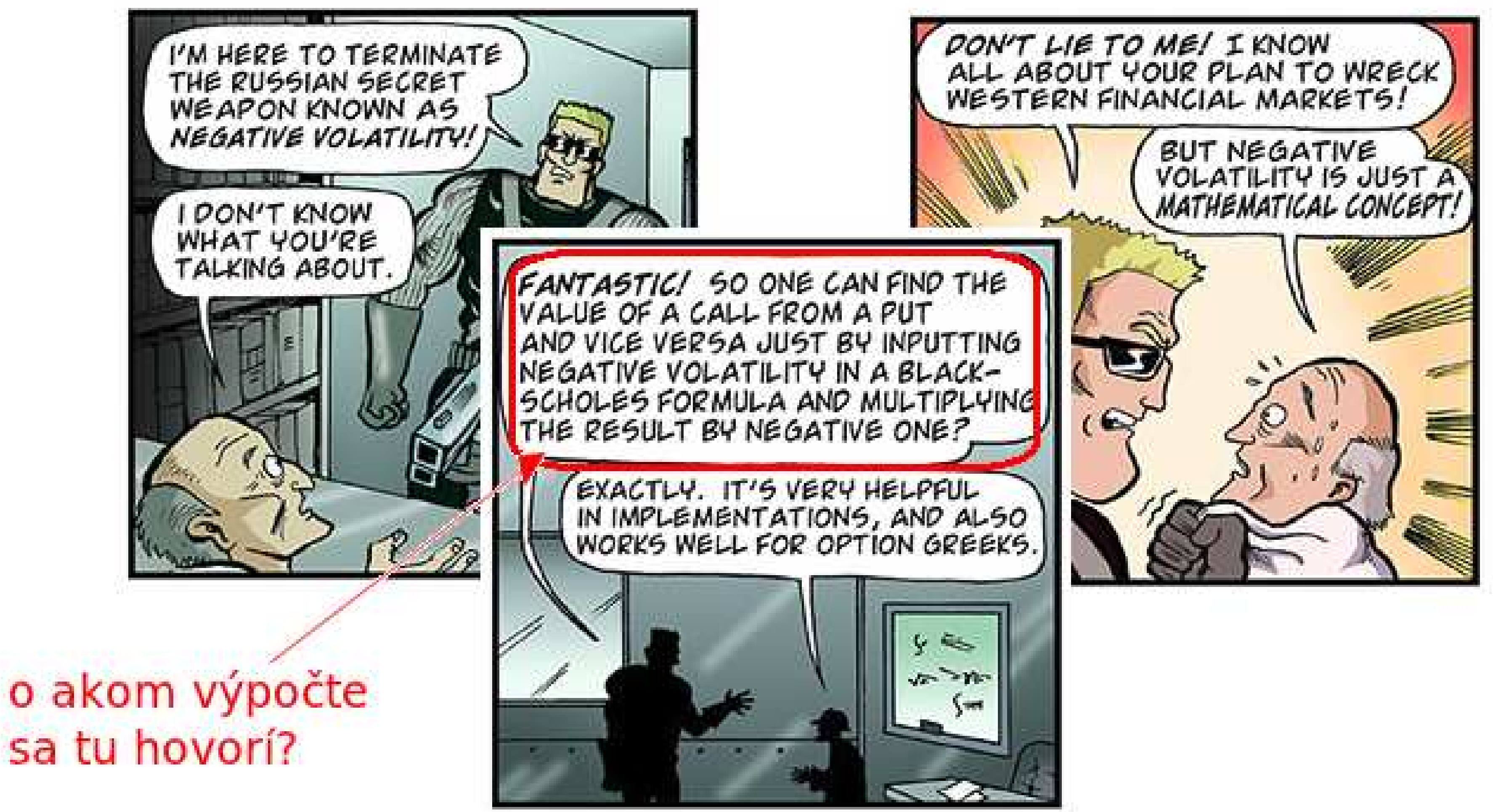

http://www.espenhaug.com/collector/collector.html

# Put opcia - alternatívne riešenie

- Zlý sen o zápornej volatilite:


- Nie iba sen... podľa internetu skutočne existuje a spája sa s menom profesora Širjaeva z Moskvy...

# Put opcia - alternatívne riešenie




OTÁZKA: Prečo takýto postup funguje?

# Akcie vyplácajúce dividendy

- DOMÁCA ÚLOHA:
  Vyriešte Black-Scholesovu PDR pre put opciu, ak akcia vypláca spojité dividendy

  NÁVOD:
  - V tomto prípade, $V(S,t) = S$ nie je riešením
  - Ako vyzerá riešenie spĺňajúce koncovú podmienku $V(S,T) = S$? Využite finančnú interpretáciu a overte svoju odpoveď dosadením do PDR

- DOMÁCA ÚLOHA:
  Označme $V(S,t;E,r,q)$ cenu opcie s expiračnou cenou $E$, ak úroková miera je $r$ a dividendová miera je $q$.
  Dokážte, že

$$V^{put}(S,t;E,r,q) = V^{call}(E,t;S,q,r)$$

  NÁVOD: Ako sa zmenia členy $d_1 d_2$ pri zámene $S \leftrightarrow E$, $r \leftrightarrow q$?

# Kombinované stratégie

- Z linearity Black-Scholesovej PDR: ak je stratégia lineárnou kombináciou call a put opcií, tak jej cena je tou istou lineárnou kombináciou cien týchto opcií
- V iných modeloch to nemusí vždy platiť:
  - majme model s transakčnými nákladmi; nie je jedno:
    - či hedžujeme opcie nezávisle od seba
    - alebo či hedžujeme celé portfólio - takto sa môžu znížiť transakčné náklady

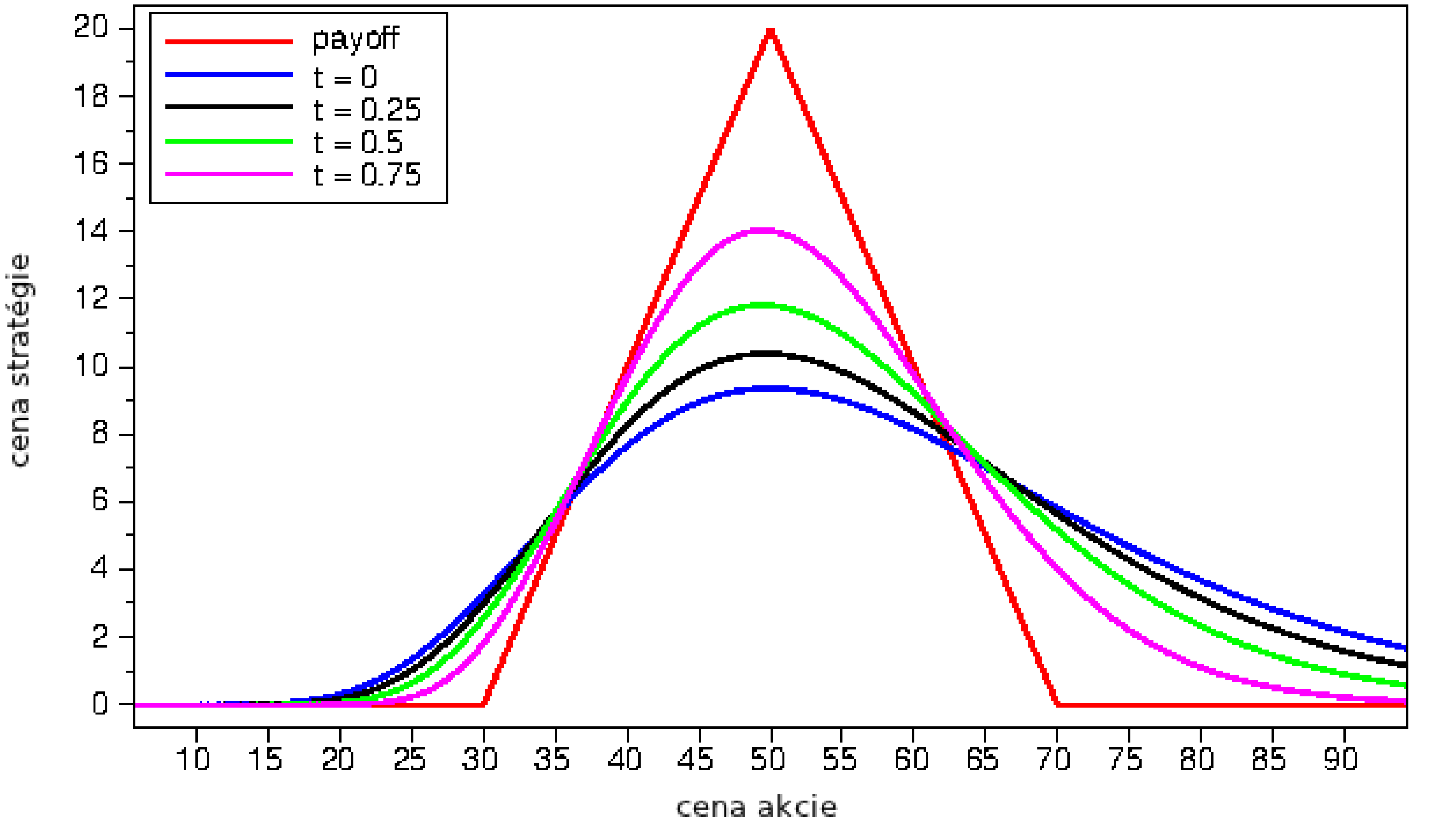
# Kombinované stratégie

PRÍKLAD:

- kúpime call opcie s expiračnými cenami $E_1$, $E_3$ a predáme dve call opcie s expiračnou cenou $E_2$, pričom $E_1 < E_2 < E_3$ a $E_1 + E_3 = 2E_2$.
- Payoff stratégie $V(S,T) = \max(S-E_1,0) - 2\max(S-E_2,0)+\max(S-E_3,0)$
- Preto Black-Scholeova cena je: $V(S,t) = V^{call}(S,t;E_1) - 2V^{call}(S,t;E_2) + V^{call}(S,t;E_3)$

# Kombinované stratégie

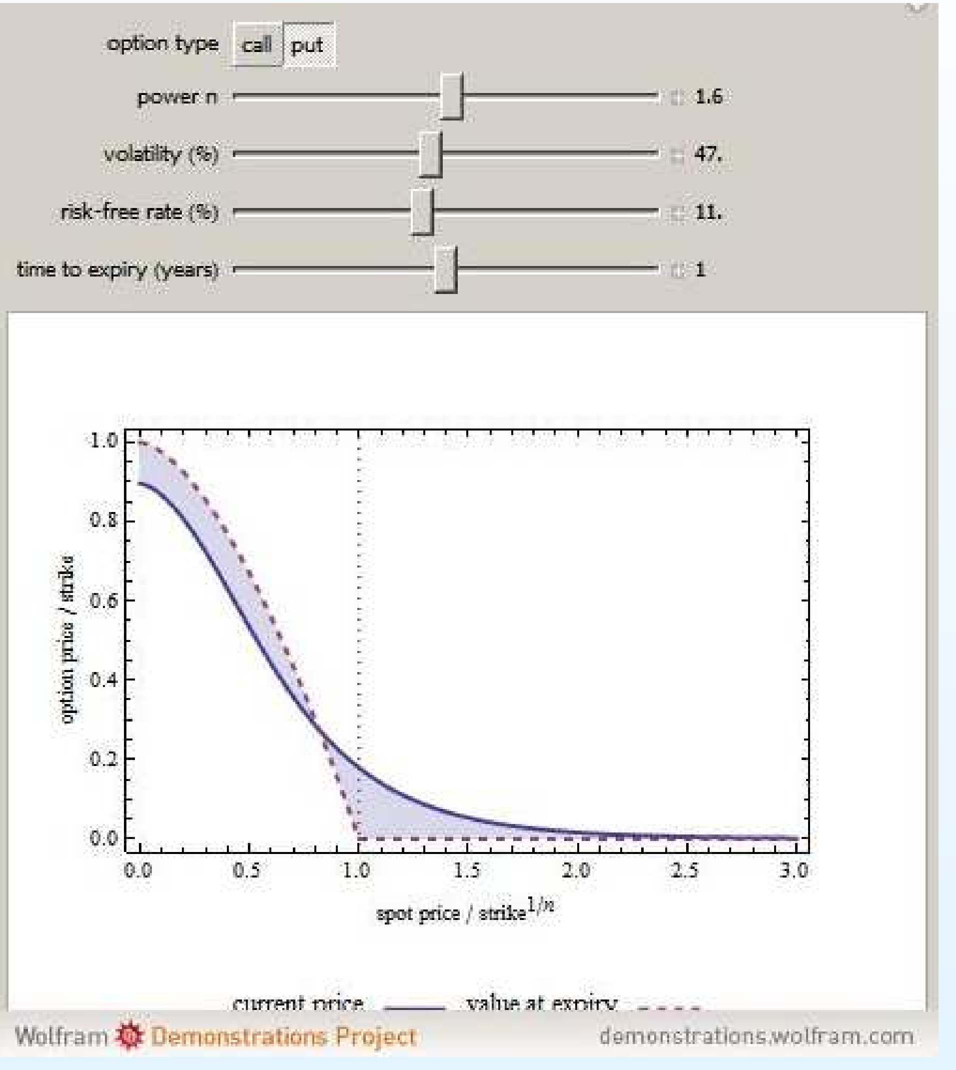
- Numerický príklad:



# Mocninové opcie (power options)

- *Power option* - opcia s payoffom $V(S,T) = \max(S^n - E, 0)$, resp. $V(S,T) = \max(E - S^n, 0)$ kde $n \in \mathbb{N}$
- Ocenenie takejto opcie
  - trasformácia $V(S,t) = W(Y,\tau)$, kde $Y = S^n$, $\tau = T - t$
  - rovnica pre $W$ má rovnký tvar ako Black-Scholesova PDR pre call, resp. put $\rightarrow$ netreba ju riešiť, vieme hneď napísať riešenie

# Mocninové opcie (power options)




http://demonstrations.wolfram.com/PricingPowerOptionsInTheBlackScholesModel/

## Chooser opcie

- Chooser opcie z prvej prednášky $\rightarrow$ tiež ich vieme okamžite oceniť pomocou Black-Scholesovho vzorca pre call a put opcie:

$$V(S,t) = call(S; E, T) + put(S; Ee^{-r(T-T_c)}, T_c)$$

  kde za $call, put$ dosadíme Black-Scholesove ceny
- Na cvičení:
  - výpočet ceny
  - ako cena závisí od $E$ a od $T_c$ (slajdy 53, 54) $\rightarrow$ tým sa dostávame k otázke **závislosti ceny od parametrov**

  Teraz - aké výsledky intuitívne očakávame

# Opakovanie: greeks pre call a put

- Greeks:
  - derivácie ceny opcie podľa jednotlivých parametrov
  - vyjadrujú teda citlivosť ceny opcie na tieto parametre
- $\Upsilon$ (vega) - závislosť od volatility:

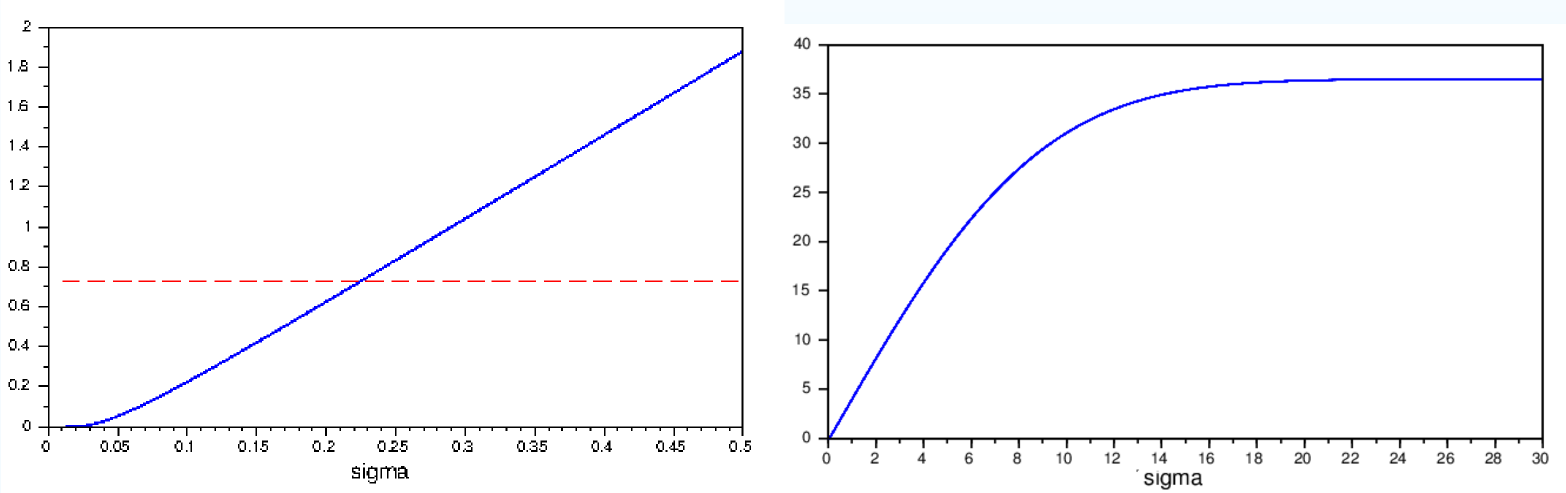
$$\frac{\partial V_{call}}{\partial \sigma} = \frac{\partial V_{put}}{\partial \sigma} = E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \sqrt{T-t}$$

  Intuícia za kladným znamienkom: väčsia hodnota opcie pri vyššej volatilite kvôli možným vyšším ziskom, strata pritom zostáva ohraničená

- Vegu potrebujeme aj pri koncepte implikovanej volatility $\rightarrow$ zopakujeme si (okrem úplnosti aj) preto, lebo ju budeme potrebovať v Lelandovom nelineárnom modeli

# Opakovanie: implikovaná volatilita

- Implikovaná volatilita - taká hodnota volatility, pri ktorej sa Black-Scholesova cena rovná trhovej
- Numericky:




- Analyticky existencia a jednoznačnosť: rastúcosť už máme, rozsah hodnôt pre call je
$V_0 := \lim_{\sigma \to 0^+} V(S,t;\sigma) = \max(0, S - Ee^{-r\tau})$,
$V_\infty := \lim_{\sigma \to \infty} V(S,t;\sigma) = S$
a využijeme spojitosť

# Lema

- Užtočná lema pri odvodzovaní *greeks* pre call a put:

$$SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2) = 0$$

Dôkaz: $N'$ je hustota N(0,1), potom algebraické úpravy

- Podobné identity aj pri niektorých iných opciách (akcie s dividendami, chooser, ...)

# Delta pre call a put

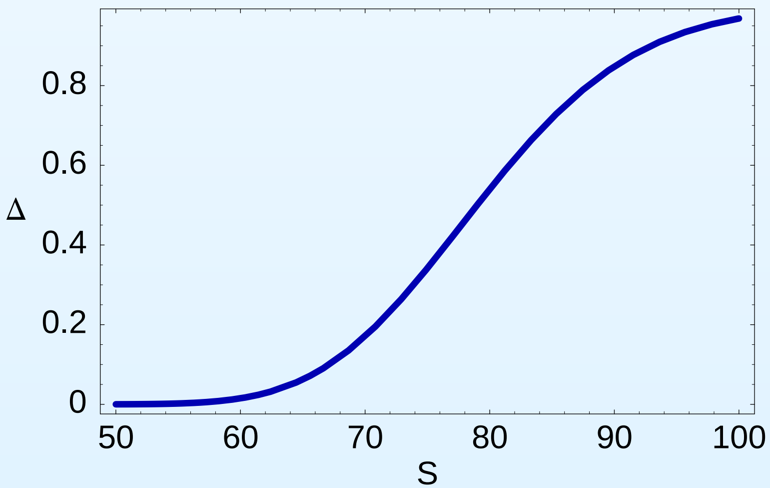
- Delta = derivácia podľa ceny akcie $S$
- Výsledok pre call opciu - z Black-Scholesovho vzorca:

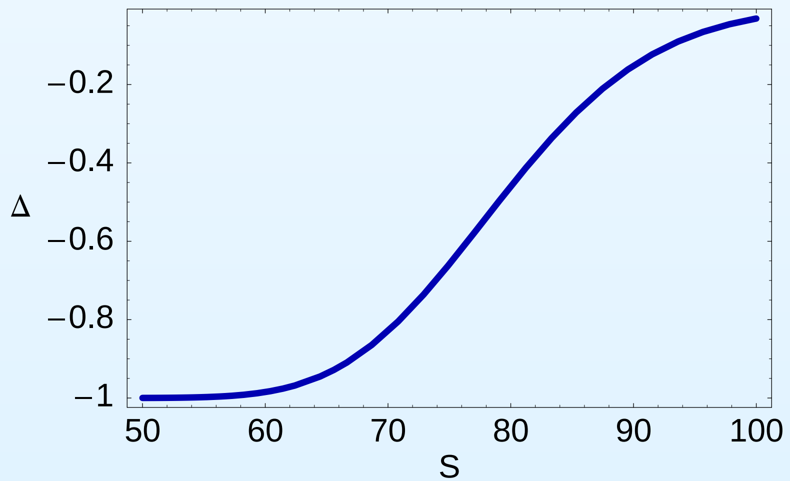
$$\Delta^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S} = N(d_1) \in (0,1)$$

- Pre put opciu - nemusíme derivovať, stačí použiť put-call paritu:

$$\Delta^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial S} = -N(-d_1) \in (-1,0)$$

- Ukážka - call vľavo, put vravo:



# Delta - delta hedžing

- Pripomeňme si odvodenie Black-Scholesovho modelu a konštrukciu bezrizikového portfólia:

$$\frac{Q_S}{Q_V} = -\frac{\partial V}{\partial S} = -\Delta$$

  kde $Q_V$, $Q_S$ je počet opcií a počet akcií v portfóliu

- Vytváraniu takéhoto portfólia sa hovorí delta hedžing (hedžing = zaisťovanie proti riziku)

# Delta - ukážka delta hedžingu

- Príklad z reálnych dát - call opcia na akciu IBM, 21.5.2002, dáta v 5-minútových intervaloch
- V čase $t$:
  - máme k dispozícii cenu opcie $V_{real}(t)$ a cenu akcie $S_{real}(t)$
  - vypočítame implikovanú volatilitu, t. j. riešime rovnicu

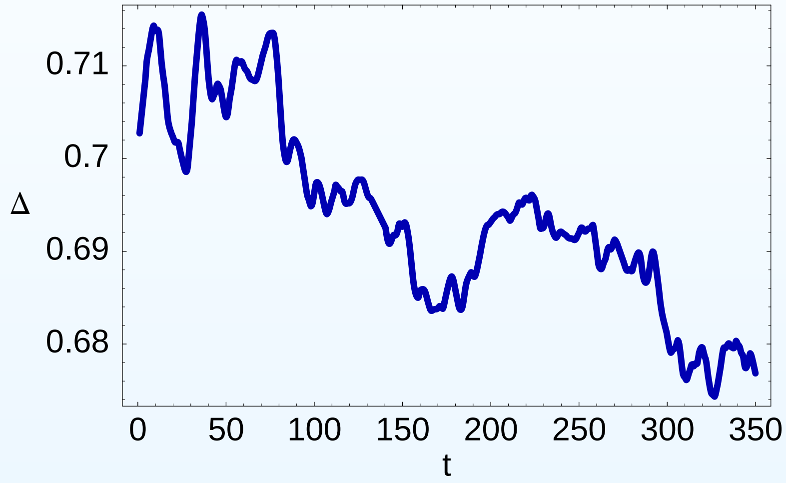
$$V_{real}(t) = V^{ec}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t)).$$

  - implikovanú volatilitu $\sigma_{impl}(t)$ dosadíme do delty call opcie:

$$\Delta^{ec}(t) = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t))$$

# Delta - ukážka delta hedžingu

- Ako sa počas dňa mení delta:




- Ak by sme vypísali jednu opciu, toto by bol počet akcií v našom portfóliu

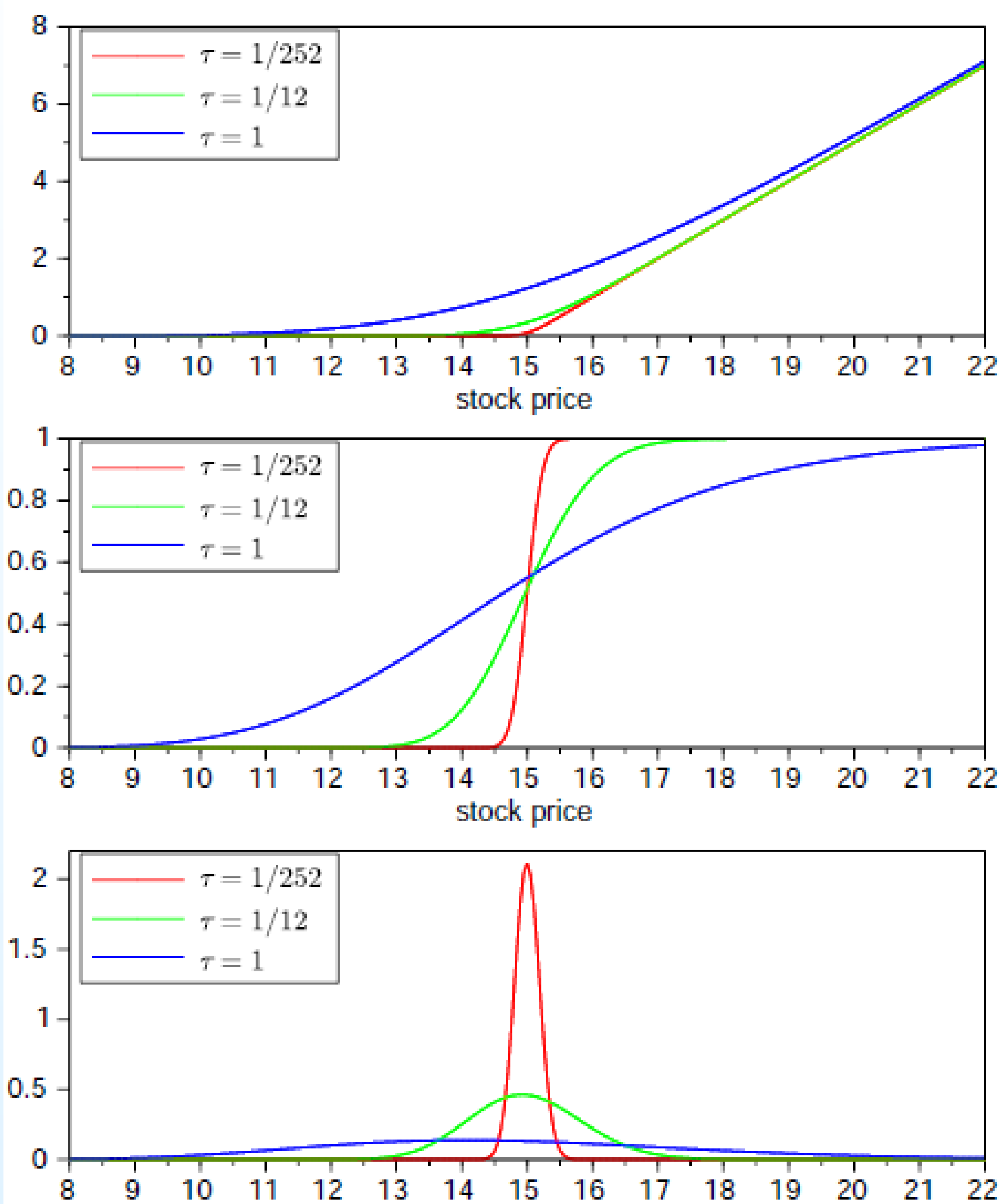
# Gama

- Výpočet:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{ec} &= \frac{\partial \Delta^{ec}}{\partial S} = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\exp(-\frac{1}{2}d_1^2)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}S} > 0 \\
\Gamma^{ep} &= \Gamma^{ec}
\end{aligned}
$$

- Meria citlivosť delty na zmenu ceny akcie

# Cena, delta, gama



# Cena, delta, gama

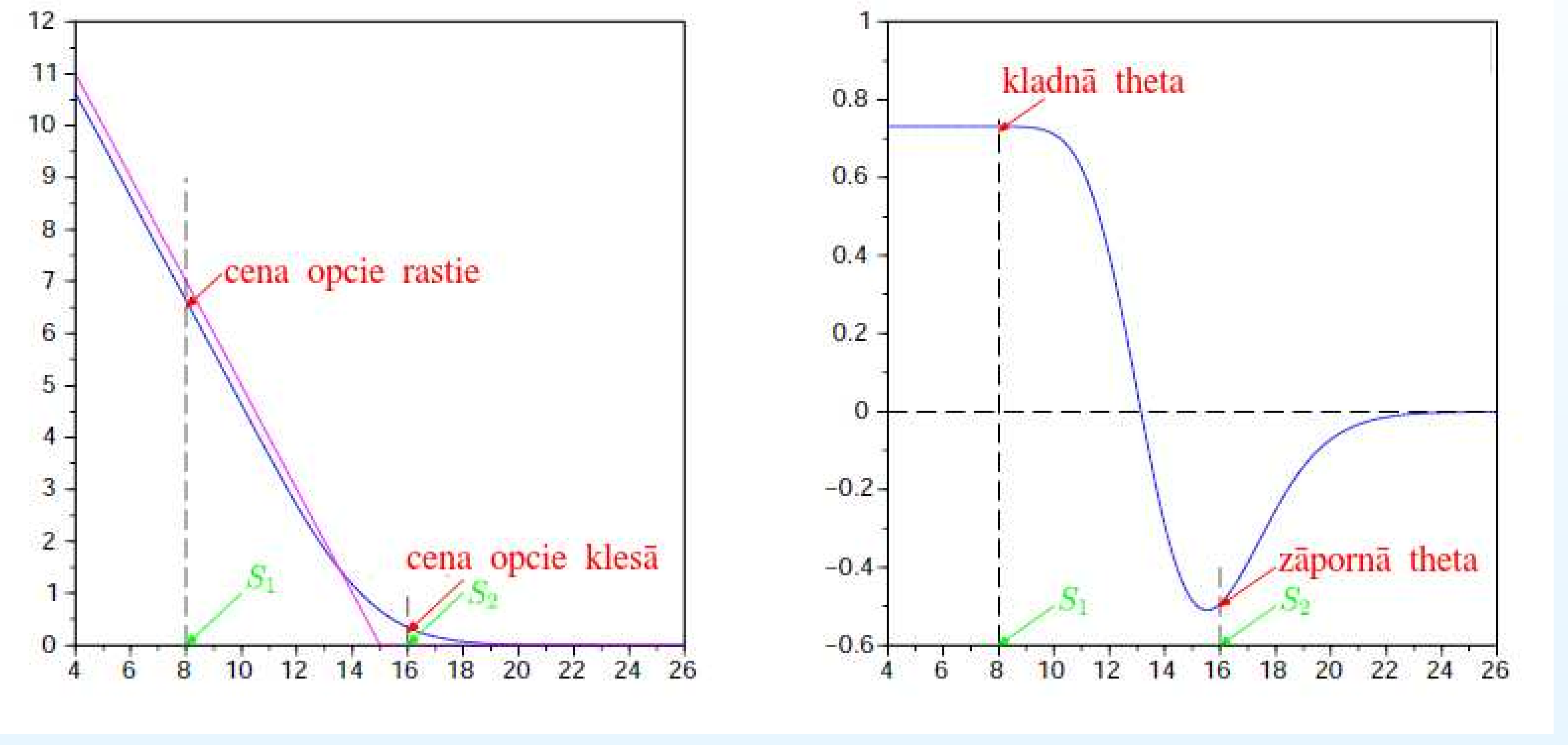
- Súčasne nastáva:
  - cena opcie je "skoro rovná čiara"
  - delta sa veľmi nemení pri malej zmene ceny akcie
  - gama je skoro nulová
- Takisto súčasne:
  - graf ceny opcie má veľkú krivosť
  - delta sa veľmi mení pri malej zmene ceny akcie
  - gama je výrazne nenulová

# Vega, ró, theta

- Ró
  - call: $P^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial r} = E(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2) > 0$
  - put: $P^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial r} = -E(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2) < 0$
- Theta:
  - call: z finančnej mat. vieme, že ak akcia nevypláca dividendy, americkú call opciu sa neoplatí uplatniť skôr $\Rightarrow$ cena európskej a americkej opcie je rovnká $\Rightarrow$ $\Theta^{ec} < 0$
  - put: nemá jednoznačne určené znamienko

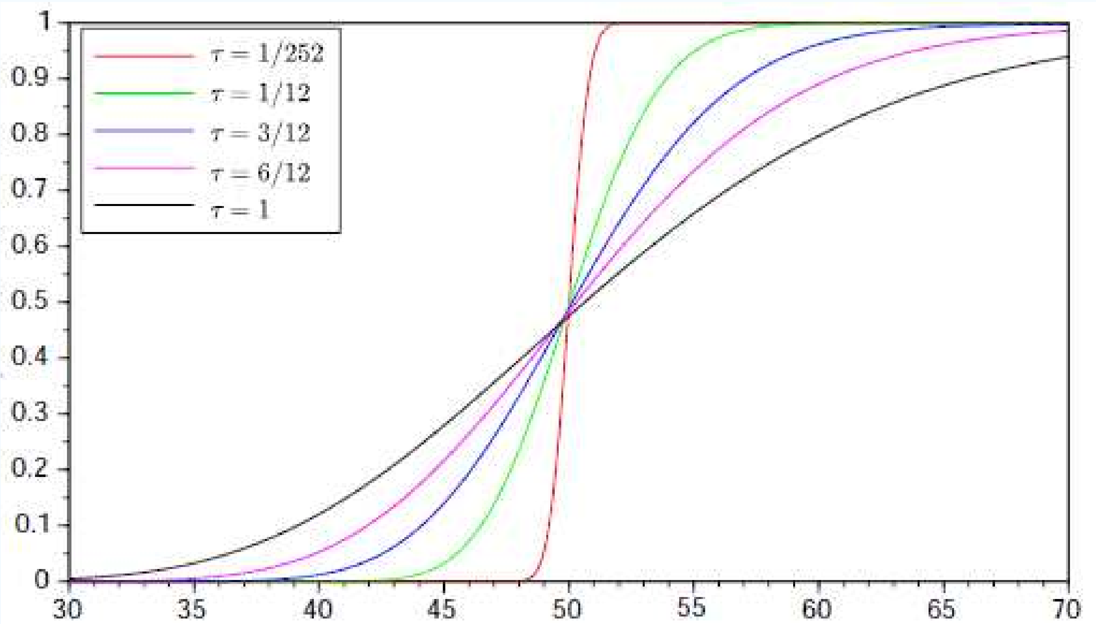
# Vega, ró, theta

- Theta putu:



# Cvičenie: ”cash-or-nothing” opcia

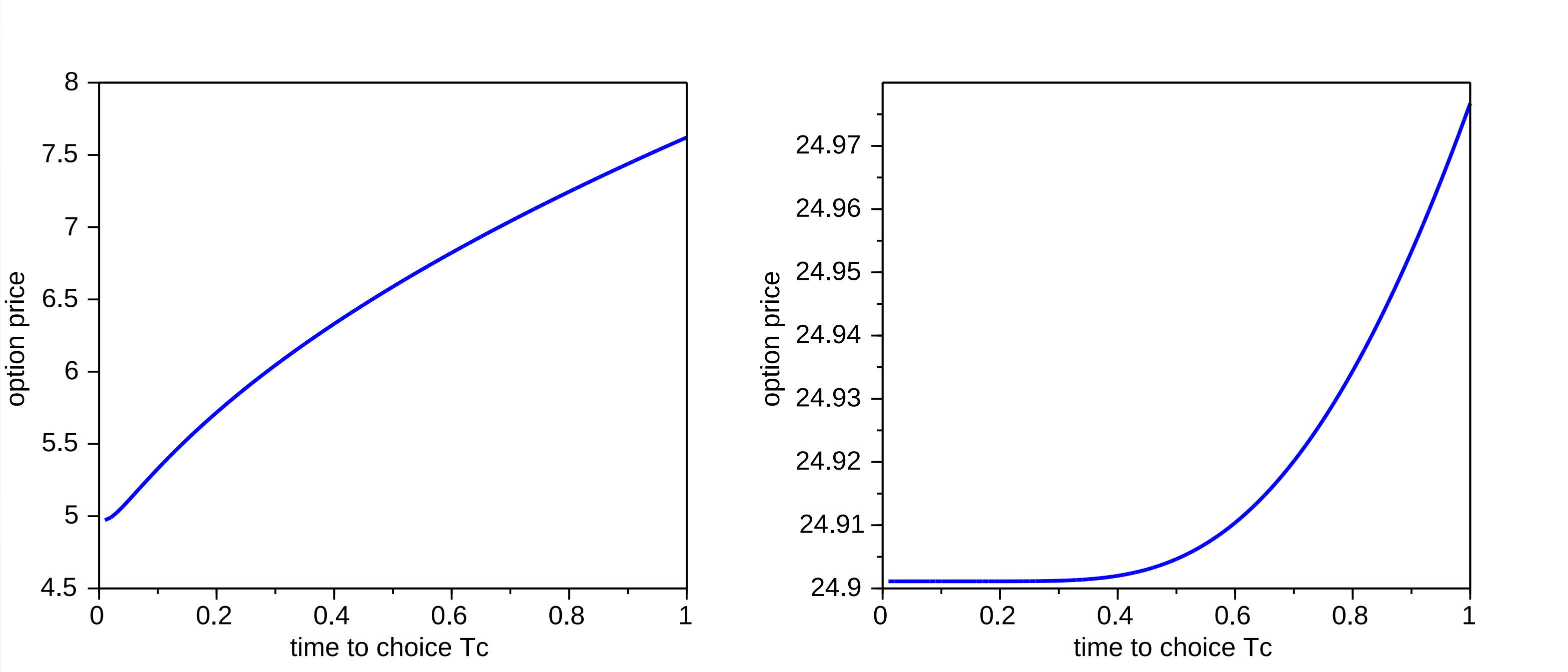
- "Cash-or-nothing" opcia: vyplatí 1 USD, ak akcia v čase expirácie prekročí hodnotu $E$, inak 0.
- Cena opcie:




- Na základe interpretácie *greeks* - načrtnite priebeh delty a vegy ako funkcií ceny akcie. Potom nakreslite presné grafy.

# Cvičenie: chooser opcia

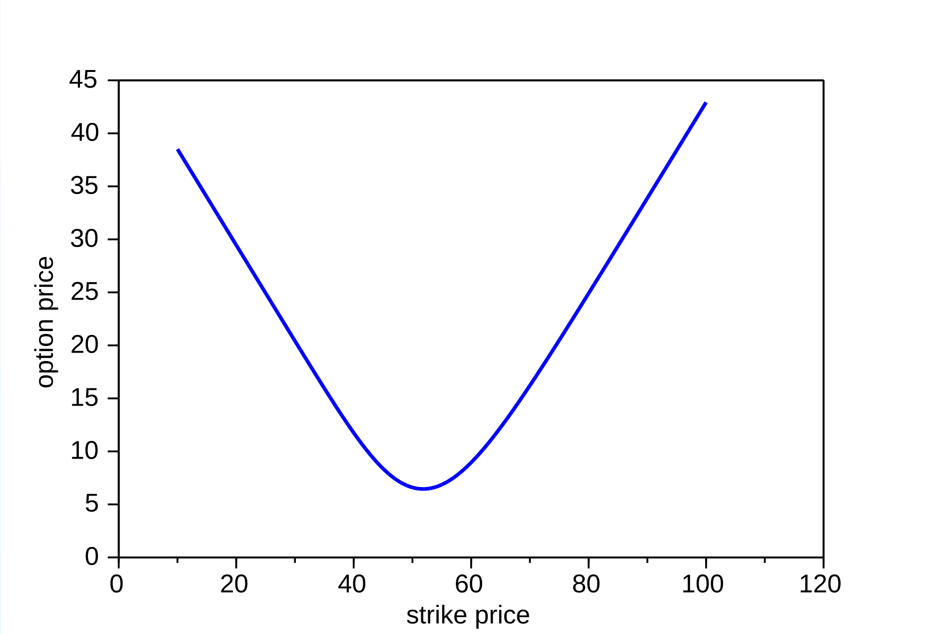
- Závislosť od času $T_c$ voľby typu opciu (call/put):




- Dokážte, že táto závislosť je rastúca.
- Akú to má finančnú interpretáciu?

# Cvičenie: chooser opcia

- Závislosť od epiračnej ceny $E$:




- Intuitívne: prečo takýto priebeh?
- Dokážte, že táto závislosť je konvexná.
- Nájdite expiračnú cenu, pri ktorej je cena opcie minimálna. Prečo je užitočné vedieť, že funkcia je konvexná?

# Cvičenie: citlivosť delty na volatilitu

- Espen Haug v článku *Know your weapon*:

One fine day in the dealing room my risk manager asked me to get into his office. He asked me why I had a big outright position in some stock index futures - I was supposed to do "arbitrage trading". That was strange as I believed I was delta neutral: long call options hedged with short index futures. I knew the options I had were far out-of-the-money and that their DdeltaDvol was very high. So I immediately asked what volatility the risk management used to calculate their delta. As expected, the volatility in the risk-management-system was considerable below the market and again was leading to a very low delta for the options. (2) This example is just to illustrate how a feeling of your DdeltaDvol can be useful. If you have a high DdeltaDvol the volatility you use to compute your deltas becomes very important. (1)

- Otázky:
  - Ako závisí delta od volatility použitej pri výpočte?
  - Vysvetlite tvrdenia (1) a (2)