IV. Spread opcie, Margrabeho formula.

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Spread opcie: Margabeho formula

- Pripomeňme si: spread opcie

$$V(S_1, S_2, T) = \max((S_1 - S_2) - E, 0)$$

- O akciách predpokladajme, že nevyplácajú dividendy a platí:

$$\begin{aligned} dS_1 &= \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dw_1 \\ dS_2 &= \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dw_2 \end{aligned}$$

pričom $\mathbb{E}[dw_1 dw_2] = \rho dt$

- Pre prípad $E = 0$ existuje explicitné riešenie pre cenu opcie - tzv. Margabeho formula
- Odvodíme PDR pre cenu opcie a nájdeme jej riešenie

Spread opcie: Margabeho formula

- Rovnaký postup ako v prípade Black-Scholesovho modelu
- Portfólio:
  - jedna opcia V
  - $-\Delta_1$ akcií S_1
  - $-\Delta_2$ akcií S_2

  Hodnota portfólia: $P = V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2$
- Zmena hodnoty portfólia: $P = dV - \Delta_1 dS_1 - \Delta_2 dS_2$, pričom
  - dS_1, dS_2 máme v prepokladoch
  - dV určíme pomocou viacrozmernej Itóovej lemy (keďže $V = V(S_1, S_2, t)$)
- Eliminujeme náhodnosť (členy pri dw_1, dw_2) - dosiahneme to voľbou $\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S_1}$, $\Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S_2}$
- Bezrizikové portfólio musí mať výnos r

Spread opcie: Margabeho formula

- Výsledná PDR:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_1\frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2\frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}$$

$$+\rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1 S_2} - rV = 0$$

s koncovou podmienkou

$$V(S_1, S_2, T) = \max(S_1 - S_2, 0)$$

- Transformácia:

$$V(S_1, S_2, t) = S_2 f(x, t), \;\; x = \frac{S_1}{S_2}$$

Spread opcie: Margabeho formula

- PDR pre funkciu $f(x,t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

  kde $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$
- Koncová podmienka: $f(x,T) = \max(x-1, 0)$
- To je Black-Scholesova PDR pre call, pričom
  - premenná x zodpovedá cene akcie S
  - expiračná cena $E = 1$
  - úroková miera je nulová
- Riešenie teda je $f(x,t) = xN(d_1) - N(d_2)$, kde $d_1 = \frac{\log x + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\tau}{\tilde{\sigma}\sqrt{\tau}}$, $d_2 = d_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{\tau}$

Spread opcie: Margabeho formula

- Riešenie v pôvodných premenných (teda cena opcie):

$$V(S_1, S_2, t) = S_1 N(d_1) - S_2 N(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_1}{S_2} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\tau}{\tilde{\sigma}\sqrt{\tau}}, d_2 = d_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{\tau}$$

- tento vzorec je známy ako Margabeho formula

- DÚ: Odvoďte týmto postupom cenu takejto opcie, ak akcie vyplácajú spojité dividendy s dividendovými mierami q_1, q_2.