Numerické metódy: PSOR algoritmus na oceňovanie amerických opcií

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Numerické riešenie

- Pripomeňme si (záver slajdov us_opcie.pdf):

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(u(x,\tau) - g(x,\tau)) &= 0,\\ \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ge 0, \quad u(x,\tau) - g(x,\tau) &\ge 0\end{aligned}$$

- Diskretizácia ako pri implicitnej metóde pre európske opcie:

$$\mathbf{A}u^{j+1} \ge u^j + b^j, \quad u^{j+1} \ge g^{j+1} \quad \text{pre} \;\; j = 0, 1, ..., m-1,$$
$$(\mathbf{A}u^{j+1} - u^j - b^j)_i (u^{j+1} - g^{j+1})_i = 0 \quad \text{pre každé } i$$

Numerické riešenie

- Matica $\mathbf{A}$ a vektor b zostávajú rovnaké:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+2\gamma & -\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma & & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & & -\gamma & 1+2\gamma & -\gamma \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma & 1+2\gamma \end{pmatrix},$$

$$b^j = (\gamma\phi^{j+1}, 0, \ldots, 0, \gamma\psi^{j+1})^T$$

kde $\gamma = \frac{\sigma^2 k}{2h^2}$

PSOR metóda

- Na každej časovej vrstve teda riešime úlohu typu

$$\begin{aligned} \mathbf{A}u \geq b, \quad u &\geq g, \\ (\mathbf{A}u - b)_i (u_i - g_i) &= 0 \quad \text{pre každé } i. \end{aligned}$$

- Definujme postupnosť

$$u_i^{p+1} = \max \left[\frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j>i} A_{ij} u_j^p \right) \right.$$
$$\left. + (1-\omega) u_i^p, \; g_i \right]$$

- Projektovaný SOR $\rightarrow$ označuje sa ako PSOR metóda alebo PSOR algoritmus

Konvergencia algoritmu k riešeniu

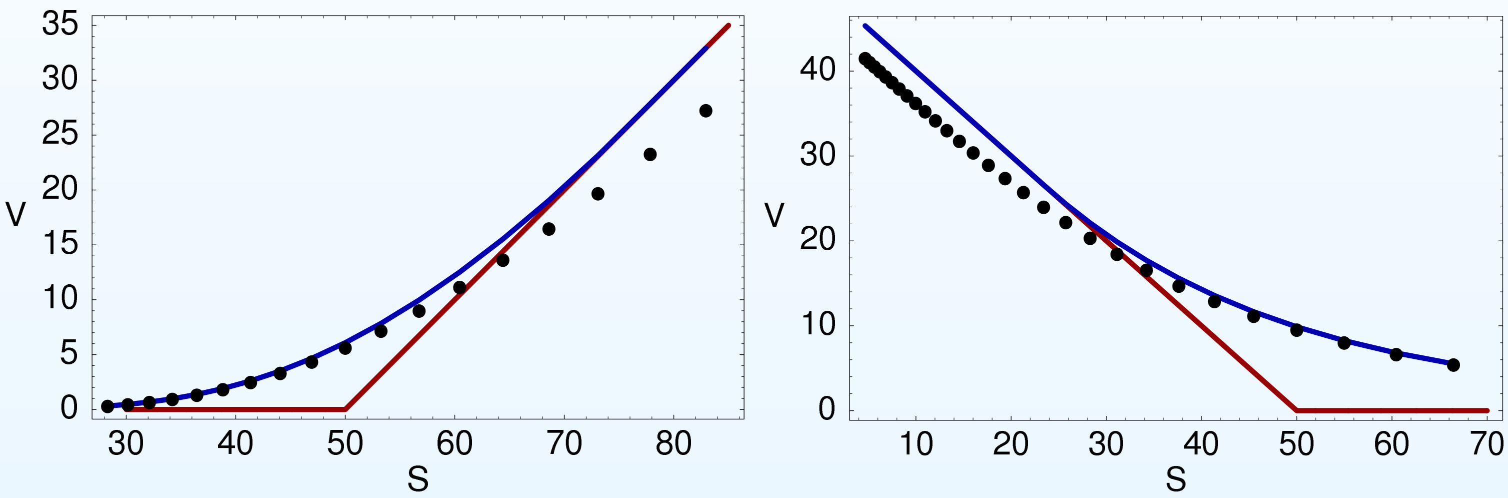
- Postupnosť u^p konverguje k nejakej limite u - dokáže sa Banachovou vetou o pevnom bode - naštudovať samostatne [Ševčovič, Stehlíková, Mikula: **Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov**, str. 182-183]
- Táto limita je riešením:
  - $u_i^{p+1} \geq g_i \;\Rightarrow$ aj limita spĺňa $u_i \geq g_i$
  - $u_i^{p+1} \geq \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j>i} A_{ij} u_j^p \right)$ $+ (1-\omega) u_i^p \;\Rightarrow$ aj limita spĺňa $u_i \geq \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} A_{ij} u_j - \sum_{j>i} A_{ij} u_j^p \right) + (1-\omega) u_i$ využijeme $A_{ii} > 0, \omega > 0 \;\rightarrow$ dostaneme $(Au)_i \geq b_i$
  - ak $u_i > g_i$, tak od určitého indexu p_0 je $u_i^p > g_i$, pre tieto indexy platí:

Konvergencia algoritmu k riešeniu

$u_i^{p+1} = \frac{\omega}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} A_{ij} u_j^{p+1} - \sum_{j>i} A_{ij} u_j^p \right) + (1-\omega) u_i^p,$
v limite pre $p \to \infty$ dostaneme $(Au)_i = b_i$ $\Rightarrow$ podmienka
$(Au - b)_i (u_i - g_i) = 0$ je splnená

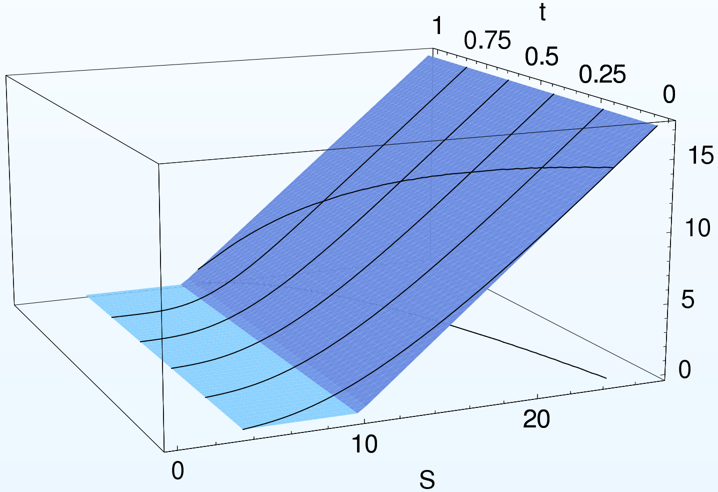
Ukážka numerických výsledkov

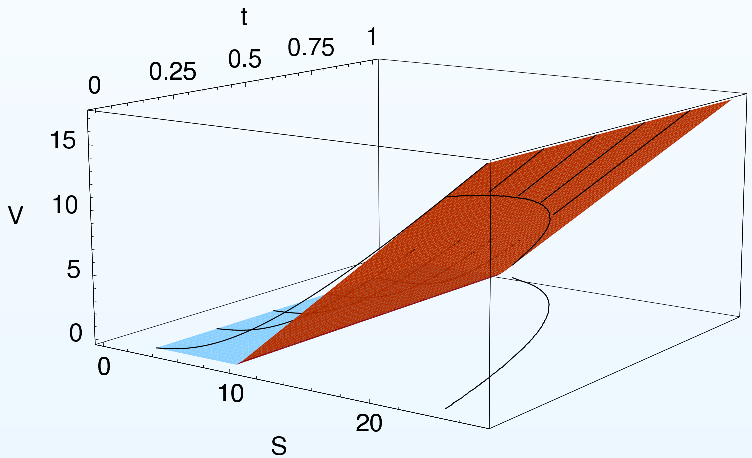
- Oceňovanie americkej call a put opcie (na porovnanie bodkami cena európskej opcie)



Ukážka numerických výsledkov

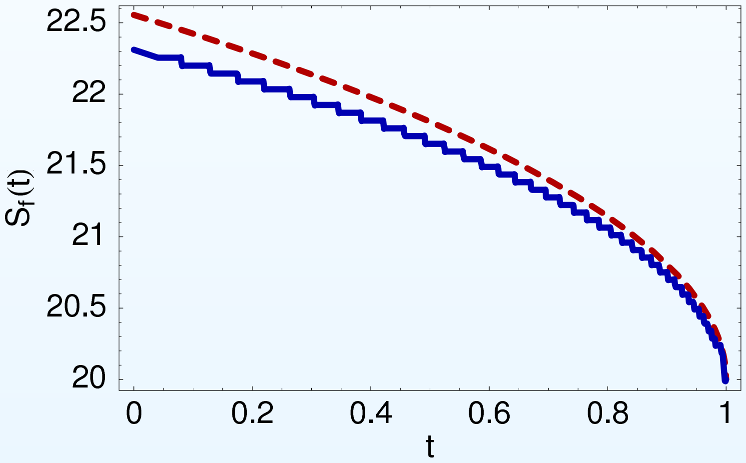
- 3D graf s vyznačenou voľnou hranicou pre call opciu:





Ukážka numerických výsledkov

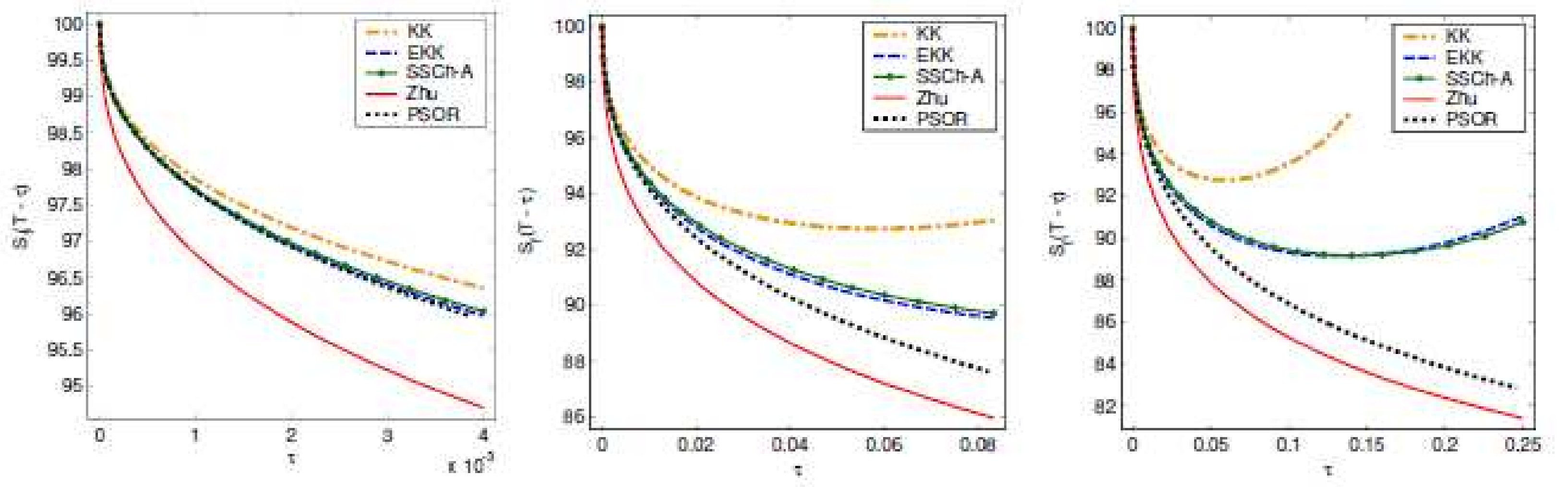
- Numerický výpočet voľnej hranice a porovnanie s "odmocninovou" aproximačnou formulou



Ukážka numerických výsledkov

- M. Lauko, D. Ševčovič: **Comparison of numerical and analytical approximations of the early exercise boundary of American put options**, ANZIAM journal 51, 2010, 430-448.

  Porovnanie aproximačných formúl pre put opciu:



$T = 4 \times 10^{-3}$ (1 day) $T = 0.08$ (1 month) $T = 0.25$ (3 months)