Lelandov model: odvodenie PDR pre cenu derivátu

Beáta Stehlíková
Finančné deriváty, FMFI UK

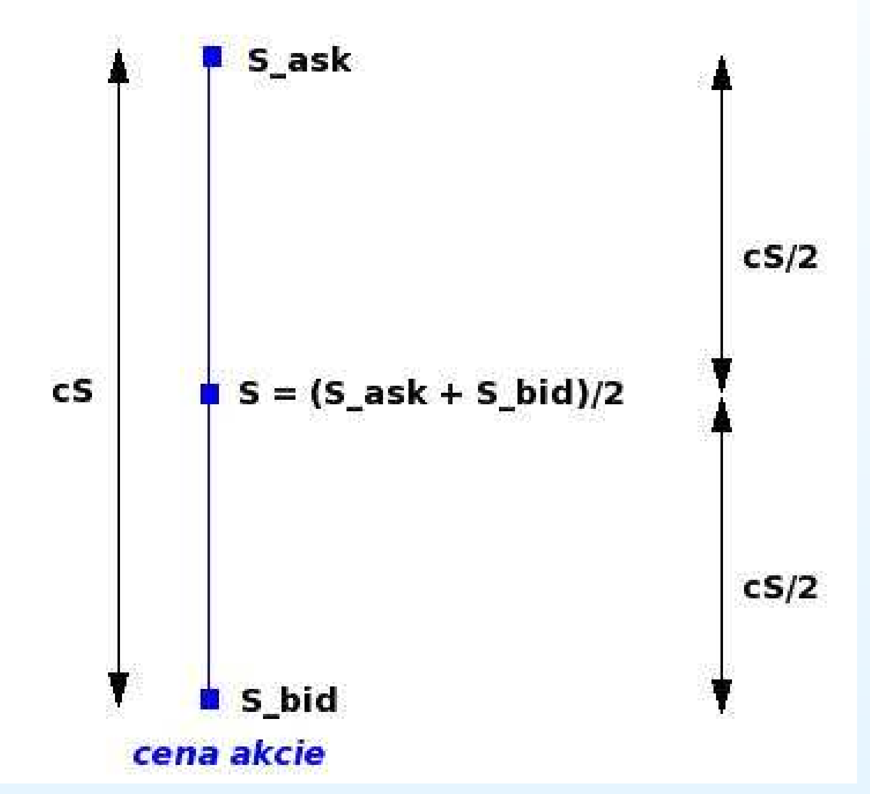
Lelandov model

- Zahrnutie transakčných nákladov do oceňovania opcií
- Pôvodný článok:

  Hayne E. Leland: **Option Pricing and Replication with Transactions Costs**, 1985

Predpoklady modelu

- Transakčné náklady sú charakterizované konštantou $c = \frac{S_{ask} - S_{bid}}{S}$, kde S je priemer bid a ask ceny akcie



- S sa riadi geometrickým Brownovym pohybom $dS = \mu S dt + \sigma S dw$

Výpočet konštanty c

PRÍKLAD:

- Informácie o akcii:

International Business Machines Corporation (IBM) - NYSE Watchli

161.23 ↑0.75(0.47%) 10:08AM EST - Nasdaq Real Time Price

Prev Close:	160.48	Day's Range:	160.00 - 161.73
Open:	160.27	52wk Range:	149.52 - 199.21
Bid:	161.29 x 100	Volume:	634,509
Ask:	161.31 x 400	Avg Vol (3m):	4,914,520

- Z dát: $S_{bid} = 161.29, S_{ask} = 161.31$
- Priemer bid a ask ceny: $S = 161.3$
- $c = \frac{0.02}{161.3} = 1.2399 \times 10^{-4}$

Odvodenie PDR

- Portfólio:
  - jedna opcia a δ akcií, pričom počet akcií určujeme pomocou delta hedžingu, teda $\delta = -\partial V/\partial S$
  - hodnota portfólia: $P = V + \delta S$
  - kvôli transakčným nákladom sa zloženie portfólia nedá meniť spojito $\rightarrow$ meníme ho v intervaloch dĺžky Δt
- Zmena hodnoty portfólia:
  - počet transakcií s akciami je $\Delta\delta$
  - náklady na jednu transakciu sú $cS/2 \Rightarrow$ celkové náklady sú $\frac{cS}{2}|\Delta\delta|$
  - zmena hodnoty portfólia preto je:

$$\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2}|\Delta\delta|$$

Odvodenie PDR

- Máme teda $\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2}|\Delta\delta|$, pričom
  - $\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta w$ z predpokladu o geometrickom Brownovom pohybe
  - $\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta w$ podľa Itóovej lemy
  - zostáva ešte určiť $\Delta\delta$
- Platí $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$, preto $\frac{\partial \delta}{\partial S} = -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, z čoho dostaneme:

$$\Delta\delta \approx \frac{\partial \delta}{\partial S} \Delta S = -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta S$$

- Sem dosadíme ΔS z geometrického Brownovho pohybu

Odvodenie PDR

- Zatiaľ máme:

$$\Delta\delta \approx -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\mu S\Delta t - \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma S\Delta w \qquad (1)$$

- Leland ukázal:
  - vo vzťahu (1) stačí zobrať členy najnižšieho ráu (t.j. zoberieme len $\Delta w \approx (\Delta t)^{1/2}$, a Δt zanedbáme)
  - pri výpočte absolútnej hodnoty sa $|\Delta w|$ dá nahradiť strednou hodnotou $\mathbb{E}[|\Delta w|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}\Delta t}$

- Teda:

$$\begin{aligned} \Delta\delta &\approx -\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma S\Delta w \\ |\Delta\delta| &\approx \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\sigma S|\Delta w| \approx \left|\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right|\sigma S\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

Odvodenie PDR

- Dosadíme všetko do zmeny hodnoty portfólia $\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - \frac{cS}{2}|\Delta\delta|$:

$$\Delta P = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{c}{2} S \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} \right) \Delta t \quad (2)$$

- Portfólio je bezrizikové $\Rightarrow$ musí platiť $\Delta P = rP\Delta t$
- Portfólio obsahuje jednu opciu a $\delta = -\partial V/\partial S$ akcií $\Rightarrow$ $P = V + \delta S = V - \frac{\partial V}{\partial S}$, a teda

$$\Delta P = r(V - \frac{\partial V}{\partial S} S)\Delta t \quad (3)$$

- Porovnáme (2) a (3):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \frac{c}{2} S \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \sigma S \sqrt{\frac{2}{\pi \Delta t}} = r(V - \frac{\partial V}{\partial S} S)$$

Odvodenie PDR

- Získanú PDR ešte upravíme do výsledného tvaru:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} sign\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

- Rovnica platí pre $S > 0, t \in [0, T]$, pridáva sa k nej koncová podmienka $V(S,T)$ v závislosti od typu derivátu, napr. $V(S,T) = \max(0, S - E)$ pre $S > 0$ v prípade call opcie
- Nelineárna parciálna diferenciálna rovnica kvôi členu obsahujúcemu funkciu signum
- Pre call a put opciu ju však budeme vedieť explicitne vyriešiť

Poznámka ku kombinovaným stratégiám

- Cena kombinovaných stratégií sa už (na rozdiel od Black-Scholesa) nedá vypočítať tak, že oceníme každú opciu zvlášť a výsledok zložíme

MATEMATICKY:

- PDR v Lelandovom modeli nie je lineárna $\Rightarrow$ napr. súčet, rozdiel alebo nejaká iná kombinácia riešení už nie je riešením.

Poznámka ku kombinovaným stratégiám

FINANČNE:

- Ak oceníme každú opciu samostatne, zarátavame tak transakčné náklady vznikajúce z udržiavania každého portfólia zvlášť.
- Ak nemáme transakčné náklady, nevadí, že máme akoby dve portfóliá. Môže sa stať, že v jednom akcie kupujeme a v druhom predávame. Žiadne náklady z toho však nevznikajú.
- V prípade transakčných nákladov to už nie je pravda. Vtedy treba portfólio uvažovať ako celok, a v prípade uvedenej situácie nerobiť zbytočné transakcie.