Lelandov model: európska call a put opcia

Beáta Stehlíková
Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Lelandova PDR - zopakovanie

- Lelandova PDR pre cenu derivátu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} sign \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

- Rovnica platí pre $S > 0, t \in [0, T]$, pridáva sa k nej koncová podmienka $V(S,T)$ v závislosti od typu derivátu, napr. $V(S,T) = \max(0, S - E)$ pre $S > 0$ v prípade call opcie
- Nelineárna parciálna diferenciálna rovnica kvôli členu obsahujúcemu funkciu signum
- Pripomeňme si, že pre Black-Scholesovu cenu call a put opcie platí $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} > 0$ (kladná gama) $\Rightarrow sign \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) = 1$

Lelandova PDR - call a put

- Ak do Lelandovej PDR dosadíme Black-Scholesovu cenu callu, resp. putu s upravenou volatilitou $V(S,t;\tilde{\sigma})$:

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$$

dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left[1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} sign\left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\right] + \frac{\partial V}{\partial S}S - rV &= \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\left[1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right] + \frac{\partial V}{\partial S}S - rV & \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S}S - rV &= 0
\end{aligned}$$

Lelandova PDR - call a put

- To znamená, že Black-Scholesovu cenu callu, resp. putu s upravenou volatilitou $V(S, t; \tilde{\sigma})$:

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 - \frac{c}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]$$

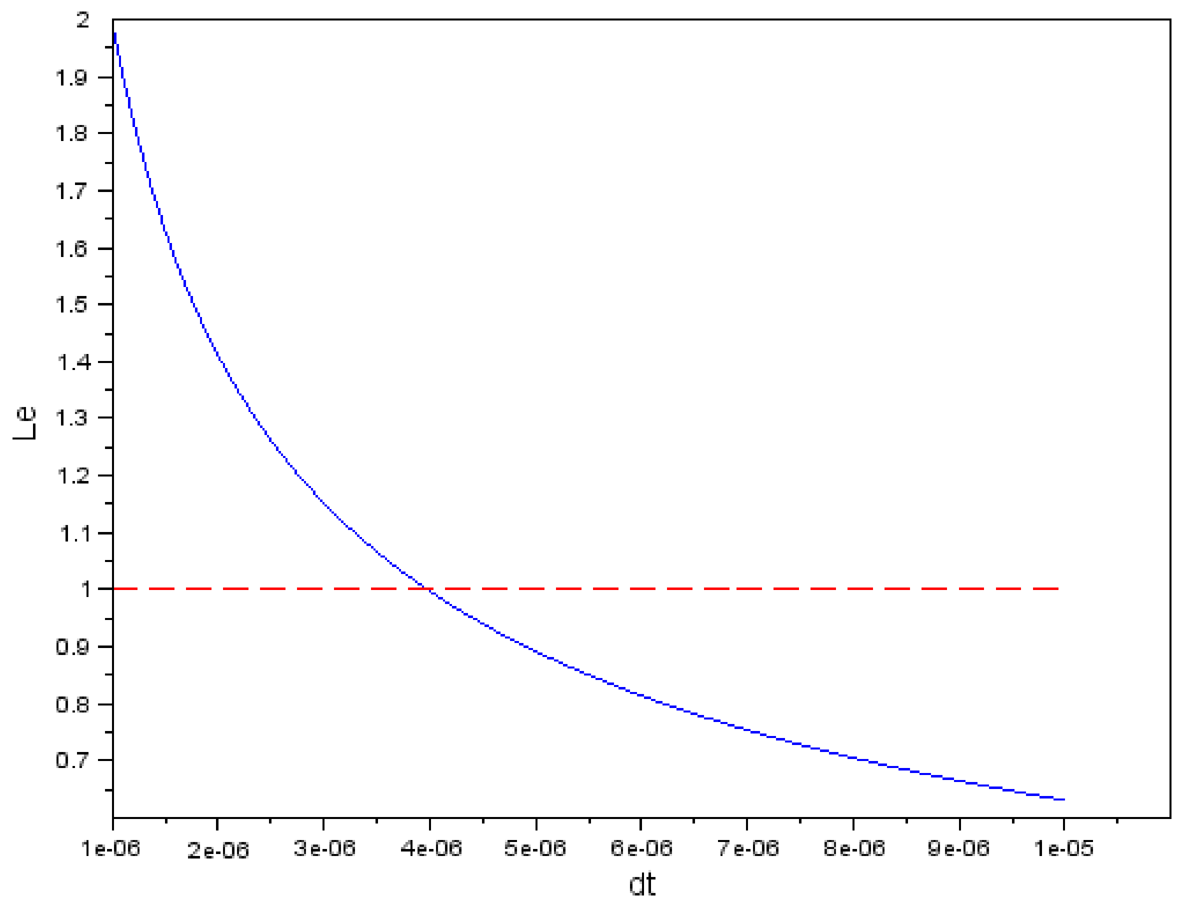
 je riešením Lelandovej rovnice pre európsky call, resp. put.

- Výraz pre $\tilde{\sigma}^2$ musí byť kladný $\Rightarrow$ to dáva ohraničenie na prípustné časy Δt - t.j. časy medzi dvomi zaisťovaniami portfólia (parametre σ, c sú dané):

$$\Delta t > \frac{2}{\pi} \frac{c^2}{\sigma^2}$$

Ohraničenie na prípustné časy Δt

GRAFICKY: závislosť Le od Δt pre $c = 5 \times 10^{-4}$, $\sigma = 0.2$



Ohraničenie na prípustné časy Δt

Uvažujme 252 pracovných dní v roku a burzu otvorenú 7 hodín denne $\Rightarrow$ Δt musí byť viac ako cca 0.42 min.

Príklad výpočtu ceny opcie I.

- Zoberme $\Delta t = 5$ minút, teda $\Delta t = 5/(60 * 7 * 252)$
- Lelandovo číslo je potom prípustné (menšie ako 1):

```
> dt <- 5/(60*7*252)
> le(dt)
[1] 0.2902151
```

- Upravená volatilita, ktorá sa bude dosadzovať do Black-Scholesovho vzorca:

```
> sigmaTC <- sqrt((1-le(dt))*(sigma^2))
> sigmaTC
[1] 0.1684975
```

Príklad výpočtu ceny opcie I.

- Vypočítame cenu call opcie s expiračnou cenou $E = 110$ a expiráciou o $\tau = 1$ rok, ak úrokova miera je $r = 1\%$ a cena akcie je $S = 100$
- Pre porovnanie aj cena bez transakčných nákladov:

```
> Call(100,110,0.01,sigmaTC,0.5)
[1] 1.610899
>
> Call(100,110,0.01,sigma,0.5)
[1] 2.339421
```

Príklad výpočtu ceny opcie II.

- Taká istá opcia pri $\Delta t = 1/252$, t.j. 1 deň:

```
> dt=1/252
> le(dt)
[1] 0.03166506
>
> sigmaTC <- sqrt((1-le(dt))*(sigma^2))
> sigmaTC
[1] 0.196808
>
> Call(100,110,0.01,sigmaTC,0.5)
[1] 2.263035
```

Bid a ask ceny opcií v Lelandovom modeli

- Payoff derivátu označme $\bar{V}(S)$, napr. $\max(0, S - E)$ pre call
- Oceňujme derivát s payoffom $-\bar{V}(S)$
- Call a put opcia: Black-Scholesova cena s upravenou volatilitou $\sigma_{TC}^2 = (1 + Le)\sigma^2$

Zhrnutie pre call a put:

- bid cena: Black-Scholesova cena s upravenou volatilitou $\sigma_{TC}^2 = (1 - Le)\sigma^2$
- ask cena: Black-Scholesova cena s upravenou volatilitou $\sigma_{TC}^2 = (1 + Le)\sigma^2$

Implikované parametre

- Ak máme bid a ask ceny akcie a opcie, vieme vypočítať
  - implikovanú volatilitu
  - implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia

  (t.j. také hodnoty, pri ktorých sa teoretická bid a ask cena opcie bude rovnať skutočnej)

VSTUPY:

- Akcia - bid a ask cena S_{bid}, S_{ask}
- Opcia - bid a ask cena V_{bid}, V_{ask}, expiračná cena E, čas zostávajúci do expirácie τ
- Ostatné parametre trhu: úroková miera r

Implikované parametre

POSTUP:

- Z bid a ask ceny akcie vypočítame $S = (S_{ask} + S_{bid})/2$ a $c = (S_{ask} - S_{bid})/S$
- Pomocou S, E, r, τ a
  - V_{bid} vypočítame Black-Scholesovu implikovanú volatilitu, to je $\sqrt{(1 - Le)\sigma^2} := \sigma_{bid}$
  - V_{ask} vypočítame Black-Scholesovu implikovanú volatilitu, to je $\sqrt{(1 + Le)\sigma^2} := \sigma_{ask}$
- Riešením sústavy rovníc $(1 - Le)\sigma^2 = \sigma_{bid}^2$, $(1 + Le)\sigma^2 = \sigma_{ask}^2$ vypočítame implikovanú volatilitu σ a Lelandovo číslo Le
- Z definície Lelandovho čísla nakoniec vyjadríme implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia Δt

Implikované parametre - príklad

PRÍKLAD:

- Akcia:

General Motors Company (GM) - NYSE ★ Follow

37.65 ↑0.11(0.29%) 9:44AM EST - Nasdaq Real Time Price

Prev Close:	**37.54**	Day's Range:	**37.54 - 38.01**
Open:	**N/A**	52wk Range:	**27.11 - 41.85**
Bid:	**37.90 x 1000**	Volume:	**594,013**
Ask:	**37.94 x 400**	Avg Vol (3m):	**26,332,800**

Implikované parametre - príklad

- Call opcia:

GM Mar 2014 37.000 call (GM140322C00037000) - OPR

1.00 ↑ 0.10(11.11%) Mar 6

Prev Close:	**0.90**	Day's Range:	**1.00 - 1.24**
Open:	**1.24**	Contract Range:	**N/A - N/A**
Bid:	**1.20**	Volume:	**434**
Ask:	**1.27**	Open Interest:	**64,168**
Strike:	**37.00**		
Expire Date:	**22-Mar-14**		

Implikované parametre - príklad

- Úrokové miery:

US Treasury Bonds Rates

Maturity	Yield	Yesterday	Last Week	Last Month
3 Month	0.04	0.04	0.04	0.04
6 Month	0.07	0.07	0.08	0.04
2 Year	0.37	0.35	0.31	0.32
3 Year	0.77	0.71	0.66	0.65
5 Year	1.64	1.57	1.47	1.49
10 Year	2.81	2.73	2.65	2.67
30 Year	3.74	3.69	3.58	3.65

Implikované parametre - príklad

- Teda máme:

```
> Sbid=37.90; Sask=37.94
> Vbid=1.20; Vask=1.27
> E=37
> r=0.04/100
>
> tau=11/252
>
> S=(Sask+Sbid)/2
> c=(Sask-Sbid)/S
```

- Spresníme výpočet implikovanej volatility (parameter *tol* vo funkcii *uniroot*):

```
> ImplVolCall <- function(S,E,r,tau,V) {
+     pom <- function(s) V-Call(S,E,r,s,tau)
+     uniroot(pom, lower=0.0001, upper=10, tol=10^(-10))$root}
```

Implikované parametre - príklad

- Vypočítame implikované volatility:

```
> sigmaAsk=ImplVolCall(S,E,r,tau,Vask)
> sigmaAsk
[1] 0.2298972
>
> sigmaBid=ImplVolCall(S,E,r,tau,Vbid)
> sigmaBid
[1] 0.2039042
```

- Poznámky:
  - S je spoločné (nie S_{bid}, S_{ask})
  - implikované volatility z Black-Scholesa

Implikované parametre - príklad

- Riešením sústavy rovníc

$$(1 - Le)\sigma^2 = \sigma^2_{bid}, \; (1 + Le)\sigma^2 = \sigma^2_{ask}$$

vypočítame Lelandovo číslo Le a implikovanú volatilitu σ :

```
> Le=(sigmaAsk^2-sigmaBid^2)/(sigmaAsk^2+sigmaBid^2)
> sigma=sigmaAsk/sqrt(1+Le)
> sigma
[1] 0.2172898
```

Implikované parametre - príklad

- Z definície Lelandovho čísla vyjadríme implikovaný čas Δt:

```
> dt=(2/pi)*(c/(sigma*Le))^2
> dt*252 # v dnoch
[1] 0.2651599
```

ZÁVER:

- implikovaná volatilita $\sigma_{impl} = 0.217$
- implikovaný čas medzi dvomi zmenami portfólia Δt_{impl} je cca $1/4$ dňa