

*Nelineárne modely oceňovania finančných derivátov:  
základné myšlienky vybraných modelov*

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

# Modely

- Vybrané modely:
  - RAPM (risk adjusted pricing methodology) - transakčné náklady a riziko z nezabezpečeného portfólia
  - prítomnosť dominantného investora
  - modelovanie investorových preferencií
- Cieľ tejto prednášky - ukázať:
  - aké finančné predpoklady sa dajú modelovať - príklady
  - aké matematické nástroje sa používajú pri analýze modelov
  - základné myšlienky na získanie určitej predstavy o takejto analýze, bez detailných výpočtov

# RAPM model

M. Jandačka, D. Ševčovič: **On the risk adjusted pricing methodology based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile**, Journal of Applied Mathematics, 3, 2005, 235-258

- Transakčné náklady ako v Lelandovom modeli - potom máme the portfólio  $P = V + \delta S$  a zmena jeho hodnoty je  $\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - r_{TC} S \Delta t$ , kde

$$r_{TC} = \frac{cS\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \frac{1}{\Delta t}$$

- Riziko z nezaisteného portfólia (riziko meriame varianciou):

$$r_{VP} = R \frac{Var[\Delta P/S]}{\Delta t},$$

kde  $R$  je hraničná hodnota vystavenia sa riziku

## RAPM model

- Dá sa odvodiť (Itóova lema, výpočet disperzie):

$$r_{VP} = \frac{1}{2} R \sigma^4 S^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 \Delta t$$

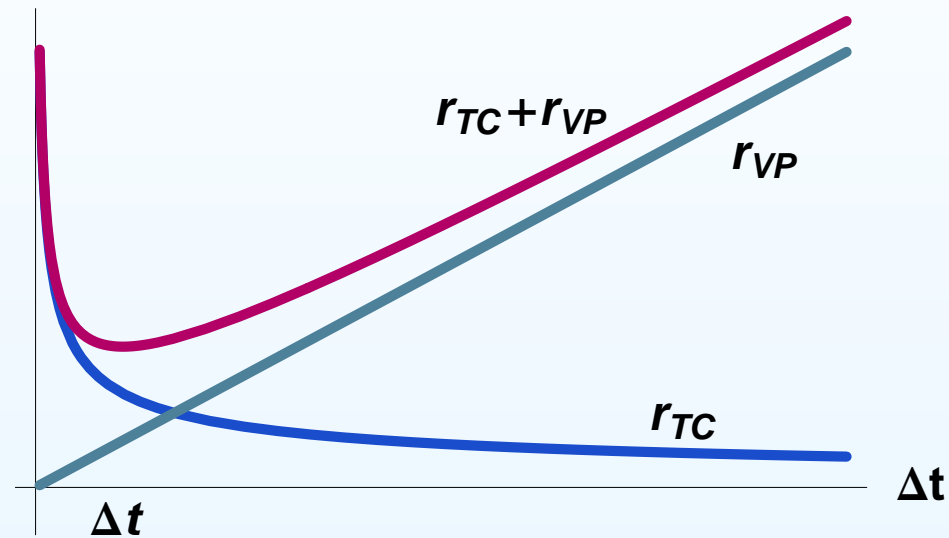
- Rizikovo neutrálny investor  $\Rightarrow$  svojou voľbou  $\Delta t$  chce minimalizovať

$$r_R = r_{TC} + r_{VP} = \frac{cS\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} R \sigma^4 S^2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 \Delta t$$

$\Rightarrow$  dostaneme optimálnu dĺžku intervalu  $\Delta t$

# RAPM model

- Hľadanie optimálneho  $\Delta t_{opt}$ :



- Pri tejto optimálnej hodnote  $\Delta t_{opt}$  máme:

$$r_R(\Delta t_{opt}) = \frac{3}{2} \left( \frac{c^2 R}{2\pi} \right)^{1/3} \sigma^2 \left| S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right|^{4/3}$$

## RAPM model

- Pri tejto optimálnej hodnote  $\Delta t_{opt}$  dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \left[ 1 + \mu \left( S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^{1/3} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0,$$

pričom:

$$\mu = 3 \left( \frac{c^2 R}{2\pi} \right)^{1/3} \text{ je konštanta;}$$

$$\Gamma^p \text{ pre } \Gamma = S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \text{ a } p = 1/3 \text{ sa počíta ako } \Gamma^p = |\Gamma|^{p-1} \Gamma$$

# RAPM model

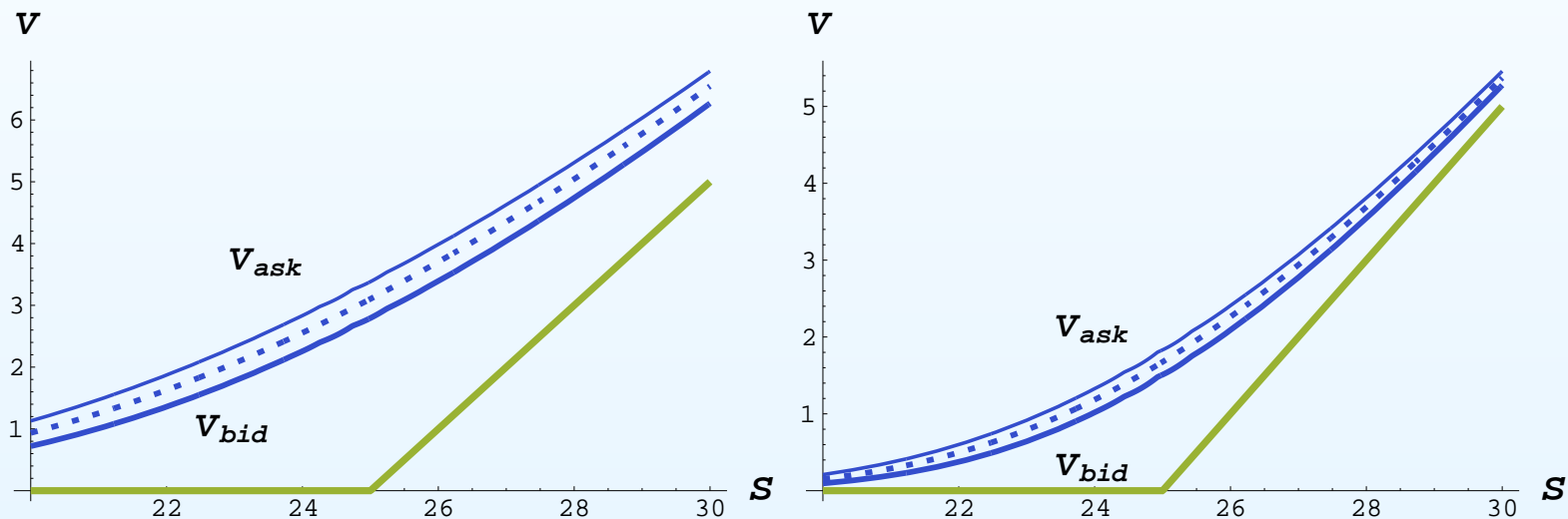
- Riešenie PDR pre cenu derivátu:
  - samotná PDR je komplikovaná nelineárna PDR
  - najprv štandardné transformácie:  $x = \ln(S/E)$ ,  
 $\tau = T - t$
  - potom - keďže PDR obsahuje člen  $\Gamma = S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$  - definuje sa nová funkcia

$$H(x, \tau) = S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

- rovnica pre  $H(x, \tau)$  je už oveľa jednoduchšia kvázilineárna PDR a dá sa pre ňu odvodiť efektívna numerická schéma
- výpočet ceny opcie  $V(S, t)$  z pomocnej funkcie  $H(x, \tau)$  nie je zložitý, vedie len na numerický výpočet jedného integrálu

# RAPM model

- Podobne ako v Lelandovom modeli - aj v RAPM modeli sa dajú počítať bid a ask ceny opcí
- Ukážka:

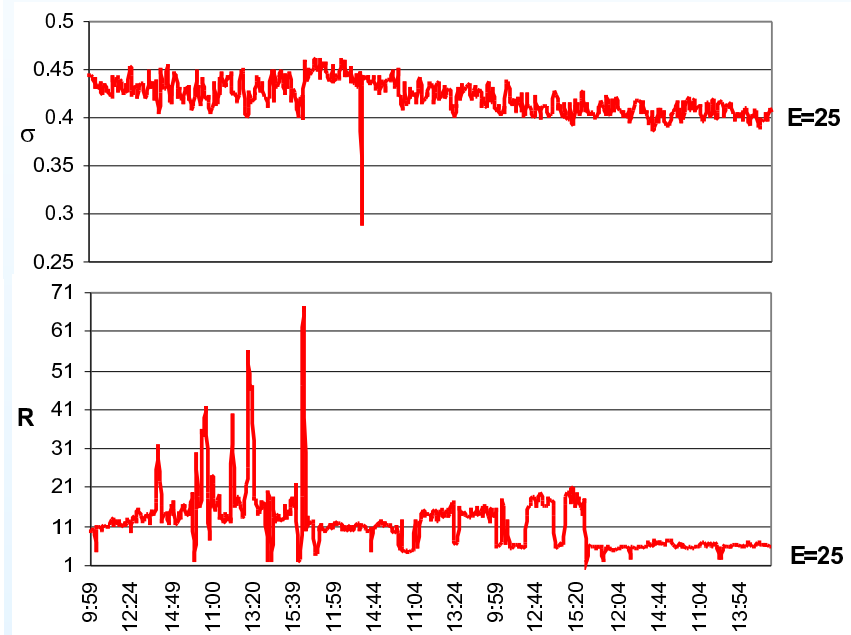
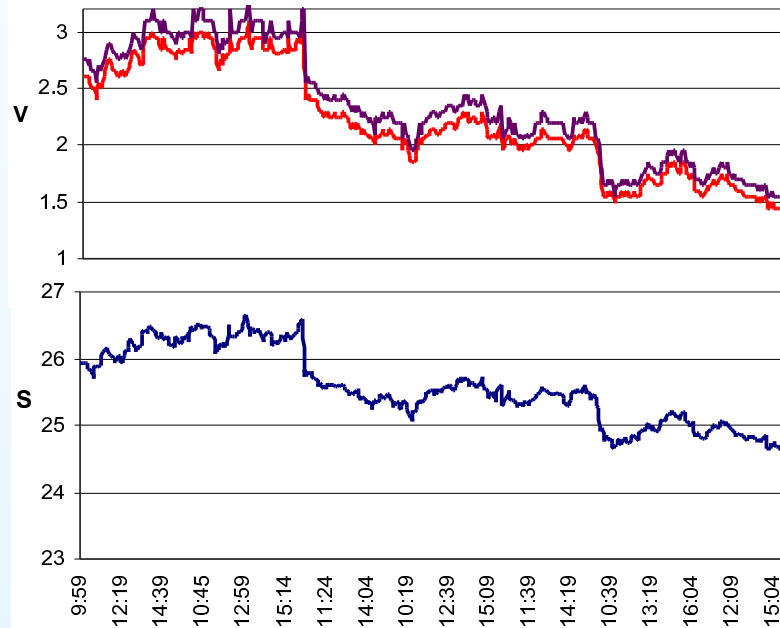


(pre porovnanie prušovanou čiarou Black-Scholesova cena opcie)



# RAPM model

- Výpočet implikovaných parametrov z reálnych dát - implikovaná volatilita  $\sigma$  a implikovaný parameter rizika  $R$ :



Vľavo: vstupné dáta, vpravo: implikované parametre

## RAPM model

- Na rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \left[ 1 + \mu \left( S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^{1/3} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0,$$

sa dá pozerať ako na rovnicu s premenlivou volatilitou  
 $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(S, t)$ :

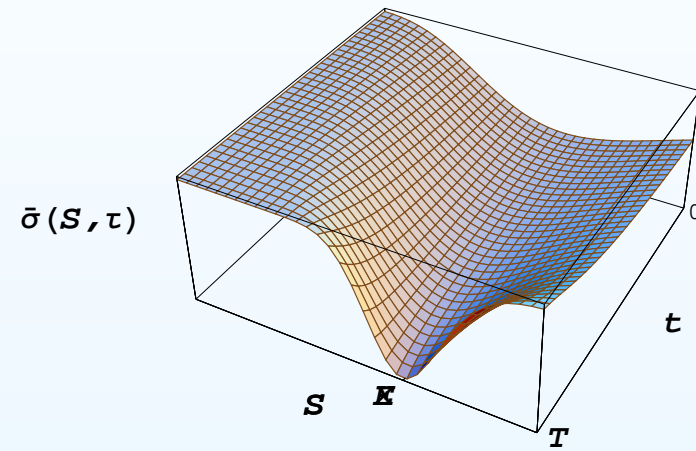
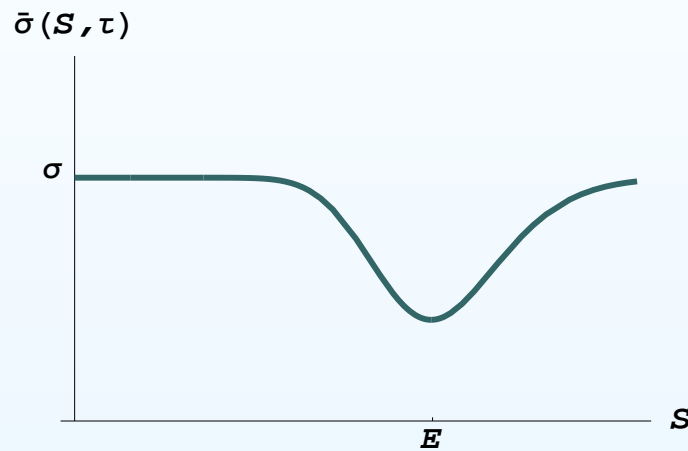
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}^2(S, t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0,$$

kde

$$\tilde{\sigma}(S, t) = \sigma \left[ 1 + \mu \left( S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^{1/3} \right]$$

# RAPM model

- Ako vyzerá priebeh funkcie  $\tilde{\sigma}(S, t)$ :



⇒ tento model dokáže vysvetliť volatility smile

# Vplyv dominantného investora

R. Frey: **Market illiquidity as a source of the model risk in dynamic hedging**, RISK publications, R. Gibson Ed., London, 2000.

- Black-Scholesov model: môžeme kupovať a predávať ľubovoľné množstvo akcií, nemá to však vplyv na ich cenu
  - V prípade veľkého dominantného investora toto nemusí byť pravda - svojou stratégiou môže ovplyvňovať cenu akcie
  - Uvažujme dominantného investora, ktorého stratégia pri hedžovaní derivátu charakterizujeme premennými:
    - $\alpha_t$  = počet akcií v čase  $t$
    - $\beta_t$  = počet bezrizikových dlhopisov čase  $t$  (t. j. hotovosť)
- a predpokladajme, že obchodovanie s akciami má vplyv na ich cenu:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw + \rho S d\alpha$$

## Vplyv dominantného investora

- Investorova stratégia závisí od času  $t$  a od ceny akcie v tomto čase  $S$ :

$$\alpha = \Phi(S, t)$$

- Pomocou Itóovej lemy vypočítame  $d\alpha$  a dosadíme do vzťahu pre  $dS$ , dostaneme:

$$dS = b(S, t)Sdt + \nu(S, t)Sdw,$$

kde

$$\nu(S, t) = \frac{\sigma}{1 - \rho S \frac{\partial \Phi}{\partial S}},$$

$$b(S, t) = \frac{1}{1 - \rho S \frac{\partial \Phi}{\partial S}} \left( \mu + \rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\nu^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial S^2} \right) \right).$$

# Vplyv dominantného investora

- PDR sa odvodí presne takým postupom ako v prípade Black-Scholesovho modelu, len namiesto konštanty  $\sigma$  bude funkcia  $\nu(S, t)$ :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\nu^2(S, t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- Stratégia dominantného investora:
  - analýza delta hedžingu na základe Black-Scholesovej ceny (nie je vhodná, nereplikuje derivát, ale vždy vedie k vyšším nákladom)
  - výpočet správnej stratégie
  - jej kvalitatívna a kvantitatívna analýza

## Vplyv dominantného investora

---

- Numerické riešenie PDR - tá istá myšlienka ako pri RAPM modeli:
  - transformácia  $H(x, \tau) = S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
  - numericky vyriešime získanú kvázilineárnu PDR
  - integráciou z nej získame cenu opcie

# Modelovanie investorovych preferencií

S. D. Hodges, A. Neuberger: **Optimal replication of contingent claims under transaction costs**, Advances o Futures and Options Research(1994), 21-35.

G. Barles, H.M. Soner: **Option Pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation**, Finance Stochast. 2 (1998) 369-397.

- Znovu transakčné náklady:

$$S_{ask} = (1 + \mu)S, \quad S_{bid} = (1 - \mu)S,$$

kde  $S = (S_{bid} + S_{ask})/2$

- Uvažujme portfólio:

$X_t$  = hodnota dlhopisov v dolároch

$Y_t$  = počet akcií

- Investor má funkciu užitočnosti  $U$  s konštantnou averziou k riziku  $\gamma$



# Modelovanie investorovych preferencií

- Ak by nebola možnosť obchodovať s opcami:
  - hodnota portfólia v danom čase  $T$  je  $X_T + Y_T S_T$
  - rieši sa úloha stochastického programovania

$$v^f(x, y, s, t) = \sup \mathbb{E}[U(X_T + Y_T S_T)]$$

pri začiatočných hodnotách  $X_t = x, Y_t = y, S_t = s$

- Ak vypíšeme  $N$  call opcií:
  - hodnota portfólia v danom čase expirácie opcií  $T$  je  $X_T + Y_T S_T - N(S_T - E)^+$
  - rieši sa úloha stochastického programovania

$$v(x, y, s, t) = \sup \mathbb{E}[U(X_T + Y_T S_T - N(S_T - E)^+)]$$

pri začiatočných hodnotách  $X_t = x, Y_t = y, S_t = s$

# Modelovanie investorovych preferencií

---

- [Hodges, Neuberger]:
  - vzťah medzi týmito dvoma optimalizačnými úlohami
- [Barles, Soner]:
  - konštrukcia optimálnych stratégií, PDR pre cenu opcie
  - matematické nástroje: rovnica dynamického programovania, zavedenie malého parametra a asymptotická analýza, transformácia PDR a jej numerické riešenie
  - výsledná PDR pre cenu opcie má podobný tvar ako v predchádzajúcich modeloch: namiesto konštantnej volatility z Black-Scholesa máme funkciu, ktorá závisí aj od  $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Rightarrow$  podobný postup riešenia