Vzorová písomná skúška z finančných derivátov

- *Vyriešenú písomku a/alebo ústnu skúšku (alebo ich časť) môžete odovzdať na kontrolu – nechať v obálke na dverách mojej kancelárie (M-266) alebo poslať mailom v pdf formáte – aspoň dva pracovné dni pred tým, ako ju chcete dostať opravenú.*
- *Mail, na ktorý chcete dostať naskenovanú opravenú skúšku:*

<u>Úloha 1</u> (max. 15 bodov)

- Rozhodnite, či sú nasledovné tvrdenia pravdivé. Odpovedajte iba áno/nie.
- Správna odpoveď 1 bod, nesprávna odpoveď mínus 1 bod, žiadna odpoveď 0 bodov.

Ak nie je explicitne povedané inak, uvažujeme európsku opciu a akciu nevyplácajúcu dividendy.

Ak cenu akcie modelujeme geometrickým Brownovym pohybom, tak výnosy majú lognormálne rozdelenie	
Cena put opcie v Black-Scholesovom modeli je rastúcou funkciou úrokovej miery (osttané parametre uvažujeme konštantné).	
Bid cena call opcie v Lelandovom modeli je menšia ako Black-Scholesova cena pri tých istých parametroch, ale bez uvažovania transakčných nákladov	
Ask cena call opcie v Lelandovom modeli je menšia ako Black-Scholesova cena pri tých istých parametroch, ale bez uvažovania transakčných nákladov	
SOR metóda na numerické riešenie systému lineárnych rovníc konverguje pre ľubovoľnú sústavu rovníc a ľubovoľný štartovací bod, ak je parameter omega z intervalu (0, 2).	
PSOR metóda slúži na numerické riešenie systému lineárnych rovníc.	
Payoff ázijských opcií závisí od vývoja podkladového aktíva na určitom časovom intervale (nielen v čase expirácie).	
Lelandov model je zovšeobecnením Black-Scholesovho modelu, ktorý uvažuje nekonštantnú volatilitu akcie.	
Limitné rozdelenie okamžitej úrokovej miery v Cox-Ingersoll-Rossovom modeli je normálne.	
Ak vypíšeme put opciu, tak pri delta hedžingu podľa Black-Scholesovho modelu máme v portfóliu kladný počet akcií.	
Implikovaná volatilita put opcie v Black-Scholesovom modeli - za predpokladu, že existuje – je určená jednoznačne.	
Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu derivátu v Lelandovom modeli je nelineárna.	
Cena call opcie v Black-Scholesovom modeli je konvexnou funkciou volatility (ostané parametre uvažujeme konštantné).	
Delta put opcie v Black-Scholesovom modeli, ak akcia vypláca spojité dividendy, je vždy záporná	
Cena európskej aj americkej call opcie je hladká (teda spojitá a spojite diferencovateľná) funkcia ceny akcie.	

<u>Úloha 2</u> (max. 5 bodov)
Uvažujme Black-Scholesove predpoklady s tým rozdielom, že namiesto geometrického Brownovho pohybu pre cenu akcie budeme - podobne ako Louis Bachelier na začiatku 20. storočia - predpokladať klasický Brownov pohyb (namiesto geometrického Brownovho pohybu). To znamená, že cena akcie sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou $dS = \mu\, dt + \sigma\, dw$. Odvoďte PDR pre cenu derivátu v takomto modeli.

<u>Úloha 3</u> (max. 5 bodov)

Uvažujme Vašíčkov model pre úrokové miery. Dnešná hodnota úrokovej miery je 1 percento. Stredná hodnota úrokovej miery o rok je 2 percentá a limita strednej hodnoty v budúcnosti (pre čas idúci do nekonečna) je 3.5 percenta. Určte všetky prípady (teda všetky štvorice parametrov modelu – kapa, theta, sigma, lambda), pri ktorých nastáva takáto situácia.

<u>Úloha 4</u> (max. 5 bodov)
Vyriešte úlohu zo slajdov:

Up-and-out opcia: DÚ

- Matematicky zapíšte úlohu oceňovania up-and-out opcie: PDR (na akej oblasti), okrajová podmienka, terminálová podmienka
- Transformujte túto úlohu na PDR na pevnej oblasti

Vzorová ústna skúška z finančných derivátov

<u>Úloha 1</u> (max. 10 bodov) – kostra predmetu
Sformulujte predpoklady Black-Scholesovho modelu a odvoďte parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu v tomto modeli Black-Scholesovým postupom.

<u>Úloha 2</u> (max. 10 bodov)
Zo slajdov o Fokker-Planckovej PDR:

> • TVRDENIE:
> Potom funkcia $g(x,t)$ je riešením Fokker-Planckovej PDR
> $$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma^2 g\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu g\right)$$
> so začiatočnou podmienkou $g(x,0) = \delta(x - x_0)$.

- Akej situácie sa týka toto tvrdenie? Vysvetlite, čo vyjadruje neznáma funkcia *g* a čo ostatné funkcie a parametre vystupujúce v PDR a v začiatočnej podmienke.
- Sformulujte Cox-Ingersoll-Rossov model pre úrokové miery a vysvetlite, ako využiť Fokker-Planckovu PDR na nájdenie limitného rozdelenia úrokovej miery v tomto modeli (rovnicu nemusíte riešiť).

<u>Úloha 3</u> (max. 10 bodov)
Zo slajdov o iteračných schémach riešenia sústav lineárnych rovníc:

- Majme iteračnú schému $x^{(k+1)} = \mathbf{T}x^{(k)} + g$ a presné riešenie x^*, ku ktorému schéma konverguje
- Platí:

$$\begin{aligned}
\|x^{(k)} - x^*\| &= \|(\mathbf{T}x^{(k-1)} + g) - (\mathbf{T}x^* + g)\| \\
&= \|\mathbf{T}\,[x^{(k-1)} - x^*]\| \\
&= \|\mathbf{T}\,[(\mathbf{T}x^{(k-1)} + g) - (\mathbf{T}x^* + g)]\| \\
&= \|\mathbf{T}^2\,[x^{(k-2)} - x^*]\| \\
&\quad \dots \\
&= \|\mathbf{T}^k\,[x^{(0)} - x^*]\| \leq \|\mathbf{T}^k\|\,\|x^{(0)} - x^*\|
\end{aligned}$$

- Zdôvodnite poslednú nerovnosť (prečo platí, pre aké normy platí).
- Čo je spektrálny polomer matice a ako sa dá pomocou neho aproximovať posledný výraz?
- Čo z tohto odvodenia dostávame (teda „na čo je vlastne dobrý tento výpočet“?)
- Kde sa v súvislosti s finančnými derivátmi stretávame s úlohou riešiť sústavu lineárnych rovníc?