Finančné deriváty 2016/2017
Teoretické príklady

Všade $w(t)$ označuje hodnotu Wienerovho procesu v čase t. V Black-Scholesovom modeli uvažujeme - ak nie je povedané inak - akciu, ktorá nevypláca dividendy.

1 Príklady na teoretické cvičenie 20.3.2017

1. Na cvičení sme vypočítali varianciu náhodnej premennej $w(1)+w(2)$. Teraz vypočítajme varianciu náhodnej premennej $w(1) + w(2) + w(3)$.
2. Vypočítajte diferenciál náhodných procesov:
   (a) $z_1(t) = x^3(t)t^2$, kde $dx = 3xdt + 5xdw$
   (b) $z_2(t) = x^3(t)y^2(t)$, kde x je rovnaké ako v prvom bode a $dy = y^2dt + dw$
   (c) $z_3(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$, kde x, y sú rovnaké ako v predchádzajúcom bode
3. Uvažujme Ornstein-Uhlenbeckov proces daný stochastickou diferenciálnou rovnicou $dx = \kappa(\theta - x)dt + \sigma dw$, kde κ, θ, σ sú kladné konštanty. Odvoďte (podobne ako pre geometrický Brownov pohyb na prednáške) obyčajnú diferenciálnu rovnicu pre strednú hodnotu procesu v čase t a nájdite jej riešenie. Ako závisí od parametrov procesu?
4. Predpokladajme, že akcia vypláca spojité dividendy. Čo očakávame pre deltu call opcie na základe jej interpretácie pomocou delta hedžingu? Aké bude mať znamienko a aká bude v porovnaní s deltou v prípade, že akcia dividendy nevypláca? Tieto vlastnosti dokážte.
5. Čo očakávame od závislosti ceny chooser opcie od času voľby? Svoje tvrdenie dokážte.

2 Príklady na precvičenie: level 1 (priebežná písomka)

Okrem príkladov z cvičení napríklad takéto úlohy:

1. Pre $t \in [0, 1]$ definujme Brownov most $B(t)$ vzťahom $B(t) = w(t) - tw(1)$. Vypočítajte jeho disperziu v čase $t \in [0, 1]$ (ako skúšku použite hodnoty tohoto procesu v časoch 0 a 1, z ktorých vyplýva aj jeho pomenovanie - Brownov *most*). V akom čase je jeho disperzia maximálna?
2. Banka modeluje výmenný kurz USD/EUR, označme ho C, geometrickým Brownovym pohybom. Všimnime si, že potom $1/C$ je výmenný kurz EUR/USD. Pobočka banky v

eurozóne potrebuje pre svoje výpočty očakávanú hodnotu výmenného kurzu USD/EUR o rok. Použitím modelu banka dostane výsledok, že je to a USD za 1 EUR. Pobočka v USA zasa pre očakávanú hodnotu výmenného kurzu EUR/USD dostane b EUR za 1 USD. Dokážte, že súčin ab nemôže byť menší ako 1.

3. Predpokladajme, že cena akcie sa riadi geometrickým Brownovym pohybom. Stredná hodnota ceny akcie o rok je 120 USD a jej medián je 115 USD. Aká je pravdepodobnosť, že o rok bude cena akcie väčšia ako 100?

4. Uvažujme Black-Scholesovu cenu call opcie $V(S,t)$. Dokážte, že pre $S_1 > S_2$ platí nerovnosť $\frac{V(S_1,t)}{V(S_2,t)} > \frac{S_1}{S_2}$. *Návod: Pozrite sa na podiel* $V(S,t)/S$ *ako na funkciu* S.

5. Predpokladajme, že cena akcie S sa riadi geometrickým Brownovym pohybom. Uvažujme pravdepodobnosť záporného výnosu v čase t ako funkciu času, teda definujme funkciu $p(t) = Pr[\ln{(S(t)/S(0))} < 0]$. Ukážte, že je možné, aby stredná hodnota $\mathbb{E}[S(t)]$ bola rastúcou funciou času t, ale pritom limita $\lim_{t\to\infty} p(t)$ bola rovná 1 (t. j. uveďte konkrétny geometrický Brownov pohyb a dokážte, že preň platia uvedené tvrdenia). Ako je možné, že tieto dve vlastnosti - rastúca stredná hodnota ceny akcie a pravdepodobnosť záporného výnosu idúca k jednej - nie sú v spore?

3 Príklady na precvičenie: level 2 (skúška)

Okrem príkladov z prednášok a cvičení, a príkladov z *levelu 1* napríklad takéto úlohy:

1. Uvažujme Black-Scholesove predpoklady s tým rozdielom, že namiesto geometrického Brownovho pohybu pre cenu akcie budeme - podobne ako Louis Bachelier na začiatku 20. storočia - predpokladať klasický Brownov pohyb. To znamená, že cena akcie sa riadi stochastickou diferenciálnou rovnicou $dS = \mu dt + \sigma dw$. Odvoďte PDR pre cenu derivátu a vypočítajte cenu call opcie v prípade, že úroková miera je nulová.

2. (a) Dokážte, že ak je payoff nezáponý a ostro kladný na nejakom intervale, tak Black-Scholesova cena je kladná pre každé $S, \tau > 0$. Aká je finančná interpretácia tohto tvrdenia?

   (b) Dokážte, že aj V je riešením Black-Scholesovej rovnice, tak aj $S\frac{\partial V}{\partial S}$ je riešením. Využite toto pomocné tvrdenie na dôkaz toho, že ak je payoff diferencovateľnou funkciou, pričom jeho derivácia podľa S je nezáporná a na nejakom intervale ostro kladná, tak derivácia riešenia podľa S je kladná pre každé $S, \tau > 0$. Aká je finančná interpretácia tohto tvrdenia?

   (c) Dokážte, že ak je payoff dvakrát diferencovateľnou funkciou, pričom jeho druhá derivácia podľa S je nezáporná a na nejakom intervale ostro kladná, tak druhá derivácia riešenia podľa S je kladná pre každé $S, \tau > 0$. Aká je (geometrická) interpretácia tohto tvrdenia? *Návod: Treba sformulovať a dokázať analogické tvrdenie k pomocnému tvrdeniu z úlohy (b)*

3. Uvažujme call opciu vypísanú investorom, ktorý má iba $\alpha \in (0,1)$ akcií. To znamená, že ak by payoff call opcie mal byť vyšší ako αS (kde S je cena akcie v čase expirácie), majiteľ opcie dostane iba αS.

(a) Dokážte, že cena takejto opcie je menšia ako cena klasickej call opcie s rovnkými parametrami.

(b) Vypočítajte Black-Scholesovu cenu takejto opcie.

(c) Vypočítajte deltu opcie a jej limitu pre $S \to \infty$ a interpretujte hodnotu tejto limity.

4. Uvažujme rovnaké predpoklady ako pri oceňovaní spread opcií. Odvoďte Black-Scholesovu cenu derivátu, ktorý v čase expirácie vyplatí payoff $\max(S_1, S_2)$ (teda hodnotu tej akcie, ktorá bude mať v čase expirácie vyššiu cenu). *Návod: Transformujte úlohu tak, aby sa dala použiť Margrabeho formula.*