Menové deriváty

1. Uvažujme výmenný kurz EUR/USD, ktorého vývoj je náhodný. Označme C_0 jeho dnešnú hodnotu, *r* spojitú úrokovú mieru pre euro a *u* spojitú úrokovú mieru pre dolár. Chceme dohodnúť forward na úrokovú mieru splatný o v čase *T*, na základe ktorého bude mať jeho držiteľ povinnosť v tomto čase kúpiť doláre s výmenným kurzom *K*. Forward bude dohodnutý tak, že v čase uzavretia obchodu sa zaň nič neplatí, podpisuje sa len dohodnutá povinnosť budúceho nákupu.
   a) Aká musí byť hodnota *K*, aby nevytvárala priestor pre arbitráž.
   b) Predpokladajme, že hodnota *K* je iná, ako bola odvodená v predchádzajúcom bode. Ako presne by tá arbitrážna príležitosť vyzerala?

2. Modelujme výmenný kurz *C* geometrickým Brownovým pohybom $dC = \mu C\, dt + \sigma C\, dw$. Chceme oceniť call opciu na tento výmenný kurz. Premyslite si súvislosť medzi výmenným kurzom (zahraničná mena prináša zahraničný úrok) a akciou s dividendami (akcia prináša dividendy) a ukážte, že sa to dá spraviť priamo pomocou Black-Scholesových vzorcov odvodených na prednáške pre deriváty akcií.

3. Majme historické dáta výmenného kurzu. Ako z nich odhadnúť parametre procesu $dC = \mu C\, dt + \sigma C\, dw$ z predchádzajúceho bodu? Ako sa výpočet zmení v porovnaní s postupom, ktorý sme na prednáške odvodili pre cenu akcie v tvare $S = S_0 \exp(\mu\, dt + \sigma\, dw)$? (Samozrejme, rovnaká úprava platí aj v prípade, že cena akcie nie je daná explicitne, ale stochastickou diferenciálnou rovnicou).

Ornstein-Uhlenbeckov proces

4. Ornstein-Uhlenbeckov proces je definovaný stochastickou diferenciálnou rovnicou $dx = \kappa(\theta - x)\, dt + \sigma\, dw$, kde κ a σ sú kladné parametre. Odvoďte obyčajnú diferenciálnu rovnicu pre strednú hodnotu tohto procesu (podobne ako na prednáške pre geometrický Brownov pohyb) a na základe nej vysvetlite:
   a) vplyv parametrov na typický priebeh procesu
   b) prečo sa tento proces označuje aj ako „mean-reverting proces"

Výber z nasledujúcich príkladov z knihy *Mark Joshi, Nick Denson, Andrew Downers: Quant Job Interview Questions and Answers*

5. What happend to the price of a vanilla call option as volatility tends to infinity?

6. In the pricing of options, why doesn't it matter if the stock price exhibits mean reversion?

7. Suppose an asset has a deterministic time dependent volatility. How would I price an option on it using the Black-Scholes theory? Where does the above argument break down if we introduce stochastic volatility (i.e., σ satisfies a stochastic differential equation)?

8. Prove that the implied vol of a put and the implied vol of a call with the same strike are the same.

9. Develop a formula for the price of a derivative paying **max(S(S-K), 0)** in the Black-Scholes model.

10. Suppose an option pays zero if spot is less than 100, or pays spot minus 100 for spot between 100 and 120 and 20 otherwise. Synthetise the option from vanilla options.