

III. Black-Scholesov model, oceňovanie opcií

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Obsah

- Black-Scholesov model:
 - Predpokladajme, že cena akcie S sa riadi geometrickým Brownovým pohybom

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw$$

- + ďalšie predpoklady (o chvíľu)
 - Odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu
- Dva spôsoby odvodenia:
 - od Blacka a Scholesa
 - od Mertona
- Explicitné riešenie pre európsku call a put opciu

Predpoklady

- Ďalšie predpoklady (okrem GBP):
 - konštantná bezriziková úroková miera r
 - žiadne transakčné náklady
 - dá sa kupovať/predávať ľubovoľné množstvo (aj neceločíselné) akcií, rovnako hotovosť
 - žiadne obmedzenia na *short selling*
 - opcie sú európskeho typu
- Najskôr uvažujme akciu, ktorá nevypláca dividendy

Odvođenje I. - podľa Blacka a Scholesa

- Označenie:
 S = cena akcie, t = čas
 $V = V(S, t)$ = cena opcie
- Portfólio: 1 opcia, δ akcií
 P = hodnota portfólia: $P = V + \delta S$
- Zmena hodnoty portfólia: $dP = dV + \delta dS$
- Z predpokladov: $dS = \mu S dt + \sigma S dw$, Z Itóovej lemy:
 $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw$

- Teda:

$$dP = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \delta \mu S \right) dt + \left(\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \delta \sigma S \right) dw$$

Odvođenje I. - podľa Blacka a Scholesa

- Eliminujeme náhodnosť: $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$
- Nenáhodné portfólio \Rightarrow jeho hodnota musí byť rovnaká ako keby sme mali peniaze uložené na účte s úrokom r :
 $dP = rPdt$
- Rovnosť dvoch vyjadrení pre dP a dosadenie $P = V + \delta S$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Dividendy v odvodení Blacka a Scholesa

- Majme spojitú dividendovú mieru q - držanie akcie v hodnote S na intervale dĺžky dt prináša dividendy $qSdt$
- V tomto prípade je zmena hodnoty portfólia $dP = dV + \delta dS + \delta qSdt$
- Rovnakým postupom ako predtým dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Odvođenje podľa Mertona - motivácia

- Problém s predchádzajúcim odvođením:
 - máme portfólio pozostávajúce z 1 opcie a δ akcií
 - vypočítame jeho hodnotu a zmenu hodnoty:

$$P = V + \delta S,$$
$$dP = dV + \delta dS,$$

teda považujeme δ za konštantu

- dostaneme však $\delta = -\frac{\partial V}{\partial S}$

Odvodenie II. - podľa Mertona

- Portfólio z opcií, akcií a hotovosti s vlastnosťami:
 - v každom čase má portfólio nulovú hodnotu
 - je samofinancované

- Označenie:

$Q_S =$ počet akcií, každá má hodnotu S

$Q_V =$ počet opcií, , každá má hodnotu V

$B =$ hotovosť, ktorá je úročená úrokovou mierou r

$dQ_S =$ zmena v počte akcií

$dQ_V =$ zmena v počte opcií

$\delta B =$ zmena hotovosti spôsobená kupovaním/predávaním akcií a opcií

Odvođenje II. - podľa Mertona

- Mathematická formulácia požadovaných vlastností:

- nulová hodnota: $S Q_S + V Q_V + B = 0$ (1)

- samofinancovanosť:

$$(S + dS) dQ_S + (V + dV) dQ_V + \delta B = 0 \quad (2)$$

- Zmena hotovosti: $dB = rB dt + \delta B$

- Diferencujeme (1):

$$0 = d(SQ_S + VQ_V + B) = d(SQ_S + VQ_V) + \overbrace{dB}^{rB dt + \delta B}$$

$$0 = \overbrace{SdQ_S + dSdQ_S + VdQ_V + dVdQ_V + \delta B}_{=0} + Q_S dS + Q_V dV + rB dt$$

$$0 = Q_S dS + Q_V dV - \overbrace{r(SQ_S + VQ_V)}^{rB} dt.$$

Odvođenje II. - podľa Mertona

- vydelíme Q_V a označíme $\Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}$:
 $dV - rV dt - \Delta(dS - rS dt) = 0$
- Máme dS z predpokladu o GBP a dV z Itóovej lemy
- Zvolíme Δ (teda pomer počtu akcií a opcií) tak, aby sme eliminovali náhodnosť (koeficient pri dw bude nula)
- Dostaneme rovnakú PDR ako predtým:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Dividendy v Mertonovom odvodení

- Majme spojitú dividendovú mieru q .
- Dividendy spôsobia nárast hotovosti \Rightarrow zmena hotovosti je
 $dB = rB dt + \delta B + qSQ_S dt$
- Rovnakým postupom dostaneme

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Black-Scholesova PDR: zhrnutie

- Matematická formulácia modelu:
Nájdite riešenie $V(S, t)$ parciálnej diferenciálnej rovnice (Black-Scholesovej PDR)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

ktorá platí pre $S > 0, t \in [0, T)$.

- Doteraz sme nevyužili to, že oceňujeme práve opciu \Rightarrow PDR platí pre každý derivát, ktorý má v danom čase T payoff závislý od ceny akcie v tomto čase
- Typ derivátu určuje koncovú podmienku v čase T
- Teda: $V(S, T) =$ payoff derivátu

Black-Scholesova PDE: jednoduché riešenia

JEDNODUCHÉ "DERIVÁTY":

- Ak oceniť deriváty s nasledovnými payoffmi:
 - $V(S, T) = S \rightarrow$ je to vlastne akcia $\rightarrow V(S, t) = S$
 - $V(S, T) = E \rightarrow$ s istotou dostaneme hotovosť $E \rightarrow V(S, t) = Ee^{-r(T-t)}$
- dosadením do PDR vidíme, že sú to naozaj riešenia

CVIČENIA:

- Nájdite cenu derivátu s payoffom $V(S, T) = S^n$, kde $n \in \mathbb{N}$.
NÁVOD: Hľadajte riešenie v tvare $V(S, t) = A(t)S^n$
- Nájdite všetky riešenia Black-Scholesovej PDR, ktoré nezávisia od času, teda $V(S, t) = V(S)$

Black-Scholesova PDR: binárna opcia

- Uvažujme binárnu opciu, ktorá vyplatí 1 USD ak je v čase expirácie cena akcie vyššia ako E , inak nevyplatí nič
- V tomto prípade

$$V(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{ak } S > E \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Hlavnou myšlienkou je transformácia Black-Scholesovej PDE na rovnicu vedenia tepla
- Transformácie sú nezávislé od typu derivátu; ten ovplyvňuje iba začiatočnú podmienku RVT

Black-Scholesova PDR: transformácie

FORMULÁCIA PROBLÉMU

- Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

ktorá platí pre $S > 0, t \in [0, T)$.

- Koncová podmienka $V(S, T) = \text{payoff derivátu}$ for $S > 0$

Black-Scholesova PDR: transformácie

KROK 1:

- Transformácia $x = \ln(S/E) \in \mathbb{R}$, $\tau = T - t \in [0, T]$ a nová funkcia $Z(x, \tau) = V(Ee^x, T - \tau)$
- PDR pre $Z(x, \tau)$, $x \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, T]$:

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) \frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0,$$

$$Z(x, 0) = V(Ee^x, T)$$

KROK 2:

- Transformácia na rovnicu vedenia tepla
- Nová funkcia $u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} Z(x, \tau)$, pričom konštanty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sa určia tak, aby PDR pre u bola RVT

Black-Scholesova PDR: transformácie

- PDR pre u :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0,$$

$$u(x, 0) = e^{\alpha x} Z(x, 0) = e^{\alpha x} V(Ee^x, T),$$

kde

$$A = \alpha\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} - r, \quad B = (1 + \alpha)r - \beta - \frac{\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2}{2}.$$

- Aby sme dostali $A = B = 0$, zoberieme

$$\alpha = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r^2}{2\sigma^2}$$

Black-Scholesova PDR: transformácie

KROK 3:

- Riešenie $u(x, \tau)$ PDR $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ je dané Greenovou formulou

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} u(s, 0) ds .$$

- Vypočítame integrál a spravíme spätné substitúcie
 $u(x, \tau) \rightarrow Z(x, \tau) \rightarrow V(S, t)$

Black-Scholesova PDR: binárna opcia (pokr.)

- Transformácie z predchádzajúcich slajdov
- Dostaneme RVT $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ so začiatočnou podmienkou

$$u(x, 0) = e^{\alpha x} V(Ee^x, T) = \begin{cases} e^{\alpha x} & \text{ak } Ee^x > E \\ 0 & \text{inak} \end{cases} = \begin{cases} e^{\alpha x} & \text{ak } x > 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Riešenie $u(x, \tau)$:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2\tau}} e^{\alpha s} ds = \dots = e^{\alpha x + \frac{1}{2}\sigma^2\tau\alpha^2} N\left(\frac{x + \sigma^2\tau\alpha}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$

kde $N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$ je distribučná funkcia N(0,1) rozdelenia

Black-Scholesova PDR: binárna opcia (pokr.)

- Cena opcie $V(S, t)$:

$$V(S, t) = e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

$$\text{kde } d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Black-Scholesova PDR: call opcia

- Teraz:

$$V(S, T) = \max(0, S - E) = \begin{cases} S - E & \text{ak } S > E \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Rovnaká postupnosť transformácií, začiatočná podmienka pre RVT:

$$u(x, 0) = \begin{cases} e^{\alpha x} (Ee^x - E) & \text{ak } x > 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

a podobný výpočet integrálu

- Cena opcie:

$$V(S, t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2),$$

kde N je distribučná funkcia $N(0,1)$ a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Black-Scholesova PDR: call opcia

DOMÁCA ÚLOHA:

Vyriešte Black-Scholesovu PDR pre call opciu na akciu, ktorá vypláca spojitú dividendu a upravte riešenie do tvaru

$$V(S, t) = S e^{-q(T-t)} N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

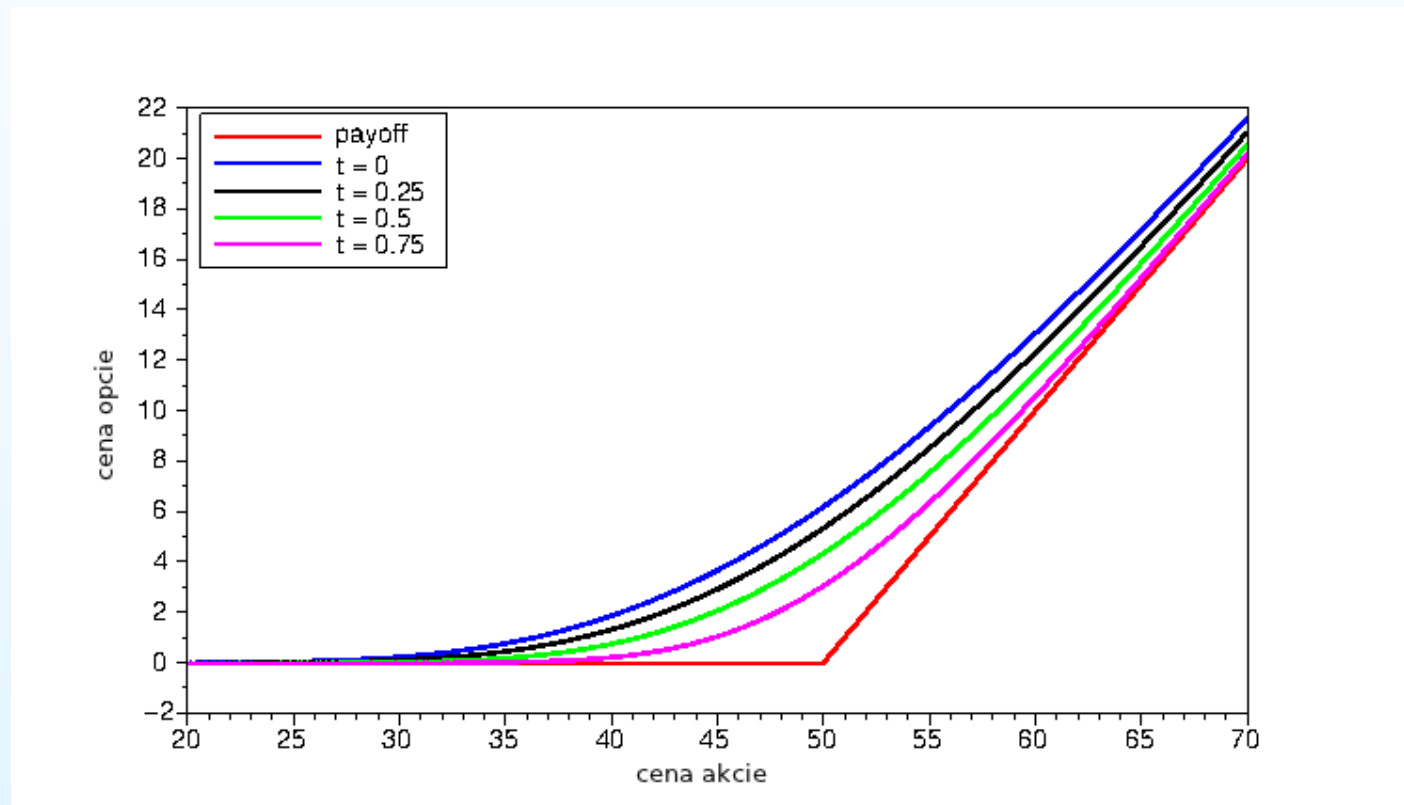
kde $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$ je distribučná funkcia $N(0,1)$ a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

POZNÁMKA: PDR je tu iná, takže treba zmeniť transformácie (ale postup zostáva rovnaký)

Black-Scholesova PDR: call opcia

Payoff (teda koncová podmienka pre $t = T = 1$) a riešenie $V(S, t)$ pre niekoľko časov t :



Black-Scholesova PDR: put opcia

FORMULÁCIA PROBLÉMU

- Parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

ktorá platí pre $S > 0, t \in [0, T]$.

- Koncová podmienka:

$$V(S, T) = \max(0, E - S)$$

pre $S > 0$

Black-Scholesova PDR: put opcia

POSTUP I.

- Rovnaká postupnosť výpočtom ako v prípade call opcie

POSTUP II.

- Využijeme linearitu Black-Scholesovej PDR a riešenie pre call opciu, ktoré už máme

Ukážeme aplikáciu druhého postupu

Black-Scholesova PDR: put opcia

- Pripomeňme si:

$$-[\textit{call payoff}] + [\textit{put payoff}] + [\textit{stock price}] = E$$

- Preto:

$$[\textit{put payoff}] = [\textit{call payoff}] - S + E$$

- Black-Scholesova PDE je lineárna: lineárna kombinácia riešení je znovu riešením

Black-Scholesova PDR: put opcia

- Pripomeňme si riešenia pre $V(S, T) = S$ a $V(S, T) = E$ (s. 13):

koncová podmienka	riešenie
$\max(0, S - E)$	$V^{call}(S, t)$
S	S
E	$Ee^{-r(T-t)}$

- Z linearity:

koncová podmienka	riešenie
$\max(0, S - E) - S + E$	$V^{call}(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)}$

- Keďže [put payoff] = $\max(0, S - E) - S + E$, dostaneme

$$V^{put}(S, t) = V^{call}(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

Riešenie pre put opciu

- **Riešenie**

$$V^{put}(S, t) = V^{call}(S, t) - S + Ee^{-r(T-t)}$$

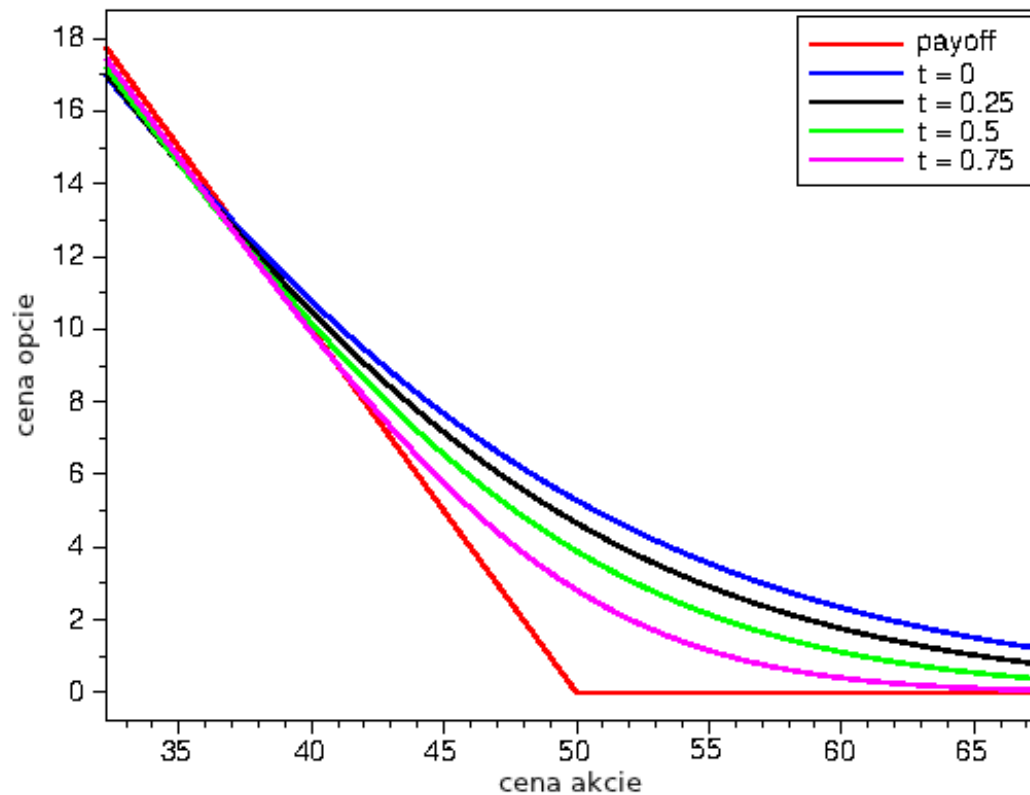
sa dá napísať v podobnom tvare ako riešenie pre call opciu:

$$V^{ep}(S, t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

kde N, d_1, d_2 sú rovnaké ako predtým

Put opcia - príklad

Payoff (teda koncová podmienka v čase $t = T = 1$) a riešenie $V(S, t)$ pre niekoľko časov t :



Put opcia - alternatívne riešenie

Komiks o zápornej volatilitě na stránke Espena Hauga:



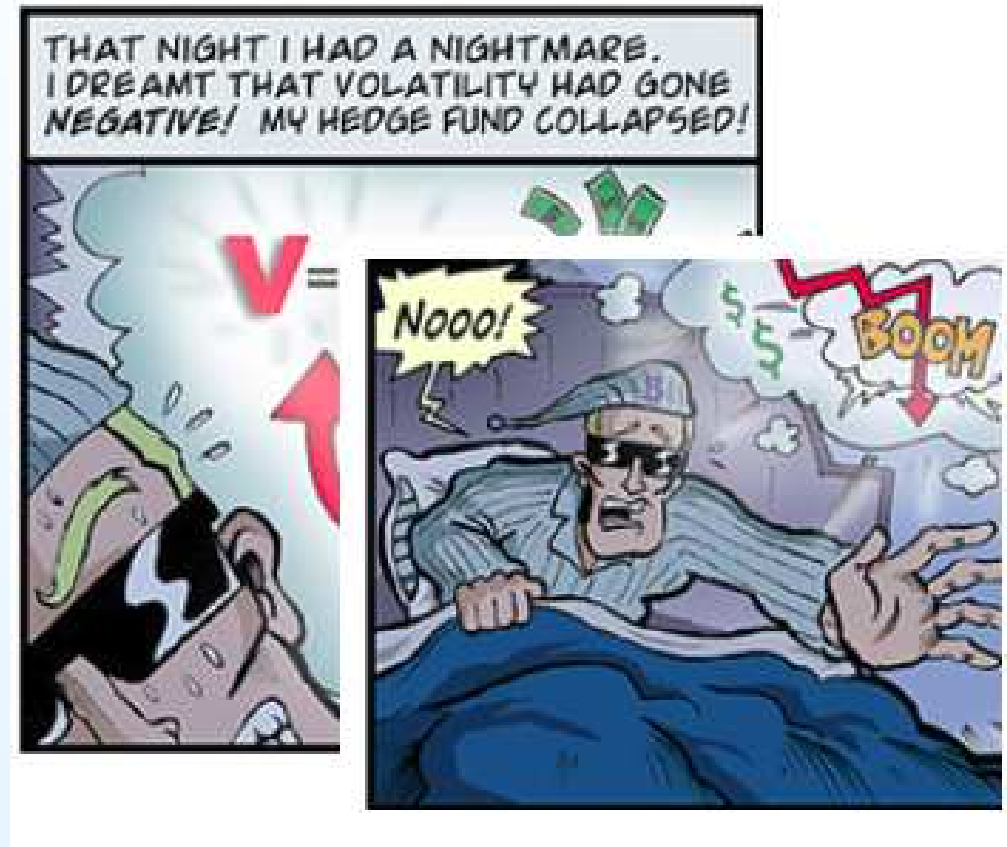
NEGATIVE VOLATILITY

Can The Collector solve the secrets of Negative Volatility before it destroys the world?

<http://www.espenhaug.com/collector/collector.html>

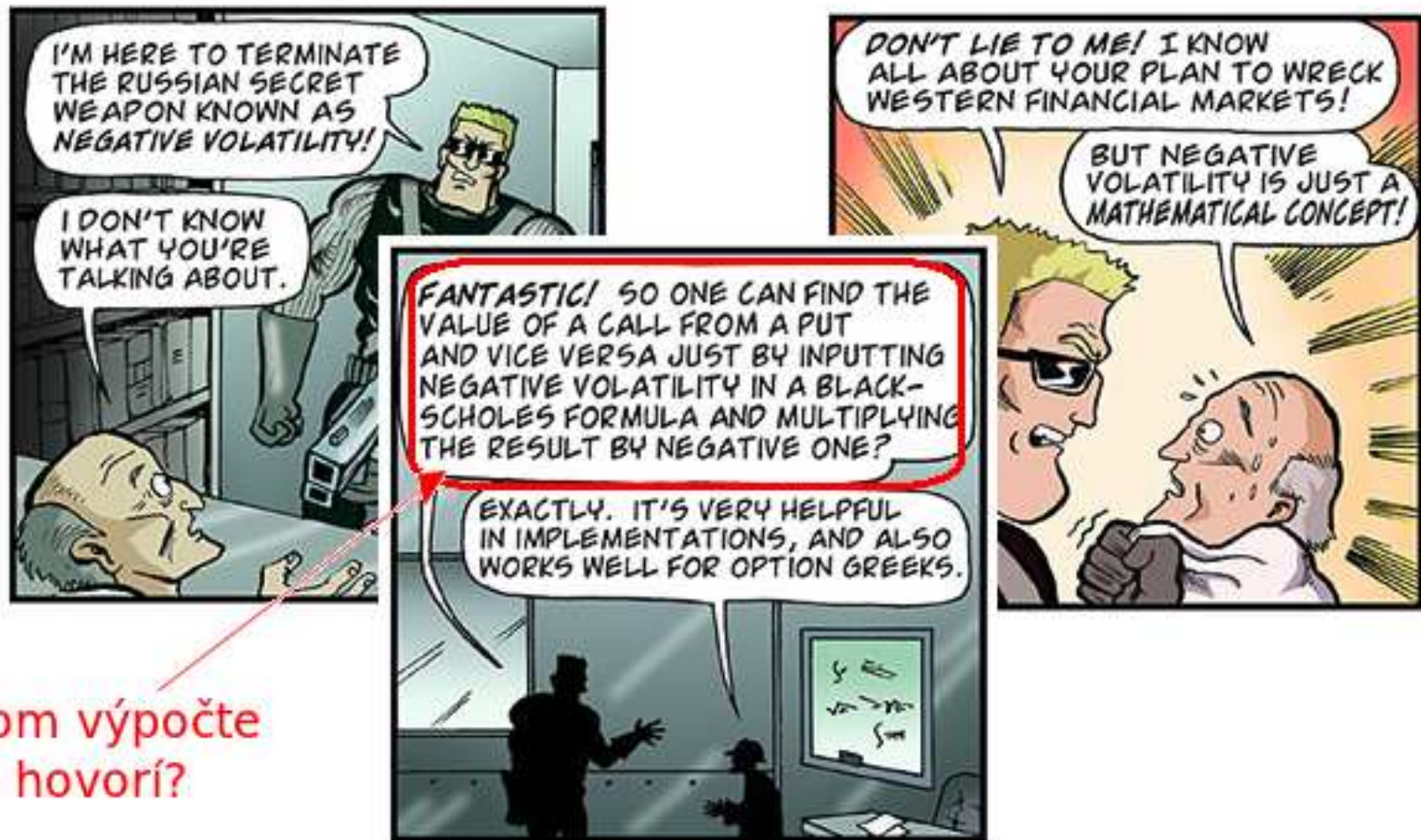
Put opcia - alternatívne riešenie

- Zlý sen o zápornej volatilitite:



- Nie iba sen... podľa internetu skutočne existuje a spája sa s menom profesora Širjaeva z Moskvy...

Put opcia - alternatívne riešenie



OTÁZKA: Prečo takýto postup funguje?

Akcie vyplácajúce dividendy

- DOMÁCA ÚLOHA:
Vyriešte Black-Scholesovu PDR pre put opciu, ak akcia vypláca spojité dividendy

NÁVOD:

- V tomto prípade, $V(S, t) = S$ nie je riešením
- Ako vyzerá riešenie spĺňajúce koncovú podmienku $V(S, T) = S$? Využite finančnú interpretáciu a overte svoju odpoveď dosadením do PDR

- DOMÁCA ÚLOHA:
Označme $V(S, t; E, r, q)$ cenu opcie s expiračnou cenou E , ak úroková miera je r a dividendová miera je q .
Dokážte, že

$$V^{put}(S, t; E, r, q) = V^{call}(E, t; S, q, r)$$

NÁVOD: Ako sa zmenia členy $d_1 d_2$ pri zámene $S \leftrightarrow E, r \leftrightarrow q$?

Kombinované stratégie

- Z linearity Black-Scholesovej PDR: ak je stratégia lineárnou kombináciou call a put opcií, tak jej cena je tou istou lineárnou kombináciou cien týchto opcií
- V iných modeloch to nemusí vždy platiť:
 - majme model s transakčnými nákladmi; nie je jedno:
 - či hedžujeme opcie nezávisle od seba
 - alebo či hedžujeme celé portfólio - takto sa môžu znížiť transakčné náklady

Kombinované stratégie

PRÍKLAD:

- kúpime call opcie s expiračnými cenami E_1, E_3 a predáme dve call opcie s expiračnou cenou E_2 , pričom $E_1 < E_2 < E_3$ a $E_1 + E_3 = 2E_2$.

- Payoff stratégie

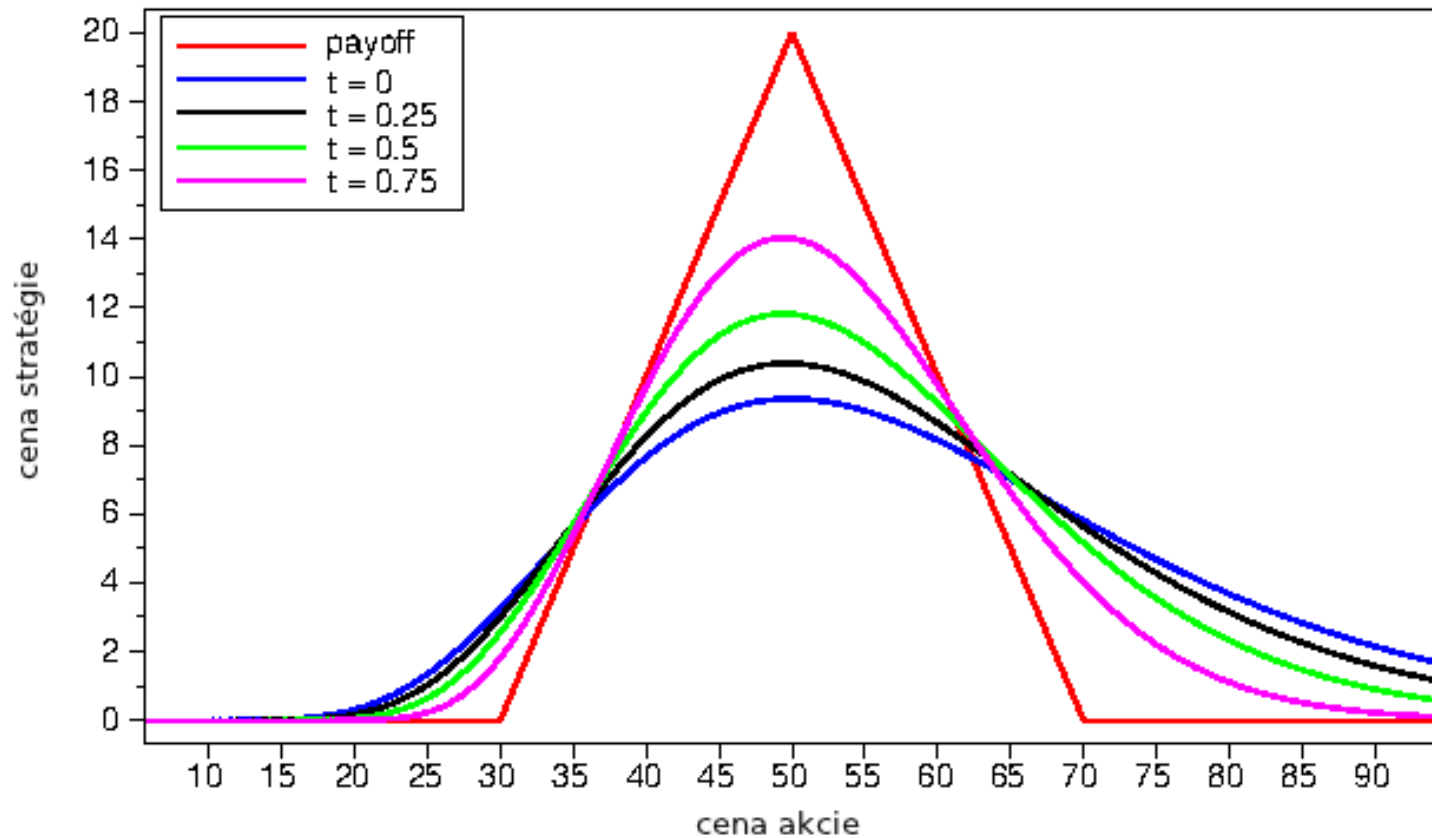
$$V(S, T) = \max(S - E_1, 0) - 2 \max(S - E_2, 0) + \max(S - E_3, 0)$$

- Preto Black-Scholeova cena je:

$$V(S, t) = V^{call}(S, t; E_1) - 2V^{call}(S, t; E_2) + V^{call}(S, t; E_3)$$

Kombinované stratégie

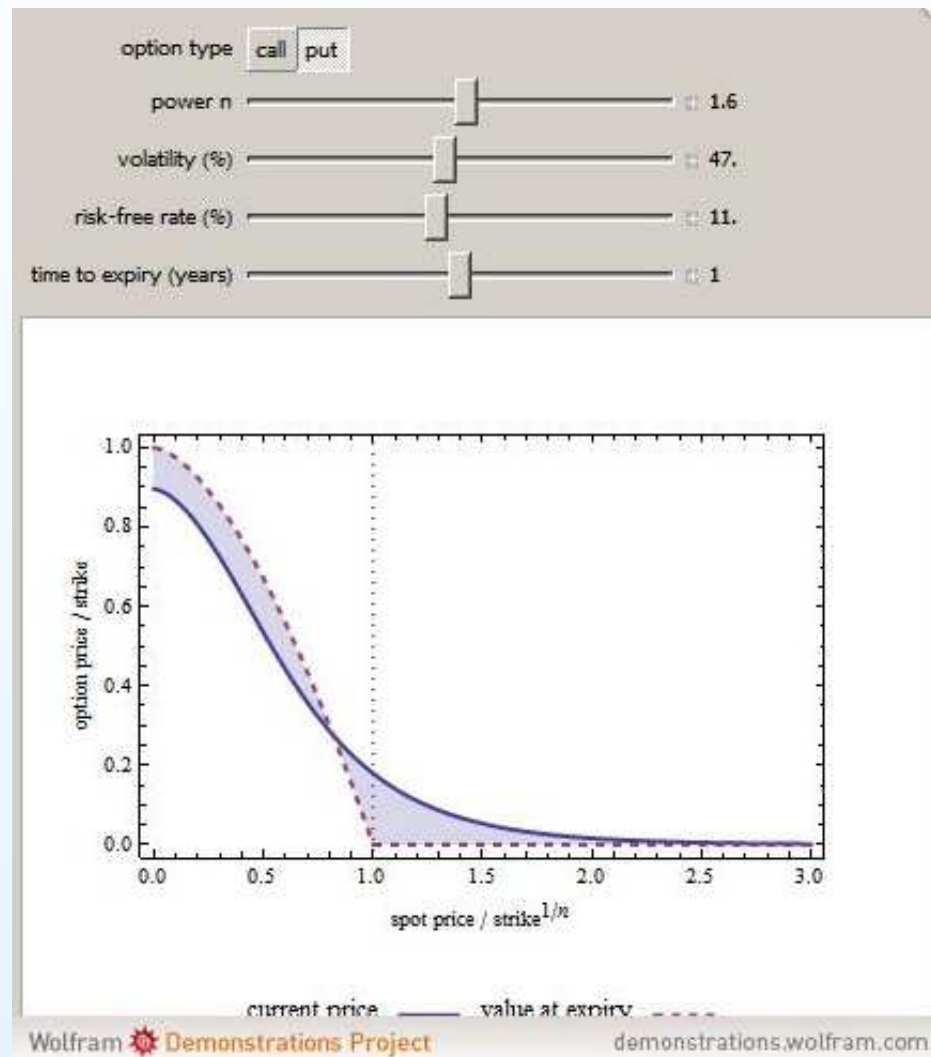
- Numerický príklad:



Mocninové opcie (power options)

- *Power option* - opcia s payoffom $V(S, T) = \max(S^n - E, 0)$, resp. $V(S, T) = \max(E - S^n, 0)$ kde $n \in \mathbb{N}$
- Ocenenie takejto opcie
 - transformácia $V(S, t) = W(Y, \tau)$, kde $Y = S^n$, $\tau = T - t$
 - rovnica pre W má rovnaký tvar ako Black-Scholesova PDR pre call, resp. put → netreba ju riešiť, vieme hneď napísať riešenie

Mocninové opcie (power options)



<http://demonstrations.wolfram.com/PricingPowerOptionsInTheBlackScholesModel/>

Chooser opcie

- Chooser opcie z prvej prednášky → tiež ich vieme okamžite oceniť pomocou Black-Scholesovho vzorca pre call a put opcie:

$$V(S, t) = call(S; E, T) + put(S; Ee^{-r(T-T_c)}, T_c)$$

kde za *call*, *put* dosadíme Black-Scholesove ceny

- Na cvičení:
 - výpočet ceny
 - ako cena závisí od E a od T_c (slajdy 53, 54) → tým sa dostávame k otázke **závislosti ceny od parametrov**

Teraz - aké výsledky intuitívne očakávame

Opakovanie: greeks pre call a put

- Greeks:
 - derivácie ceny opcie podľa jednotlivých parametrov
 - vyjadrujú teda citlivosť ceny opcie na tieto parametre
- Υ (vega) - závislosť od volatility:

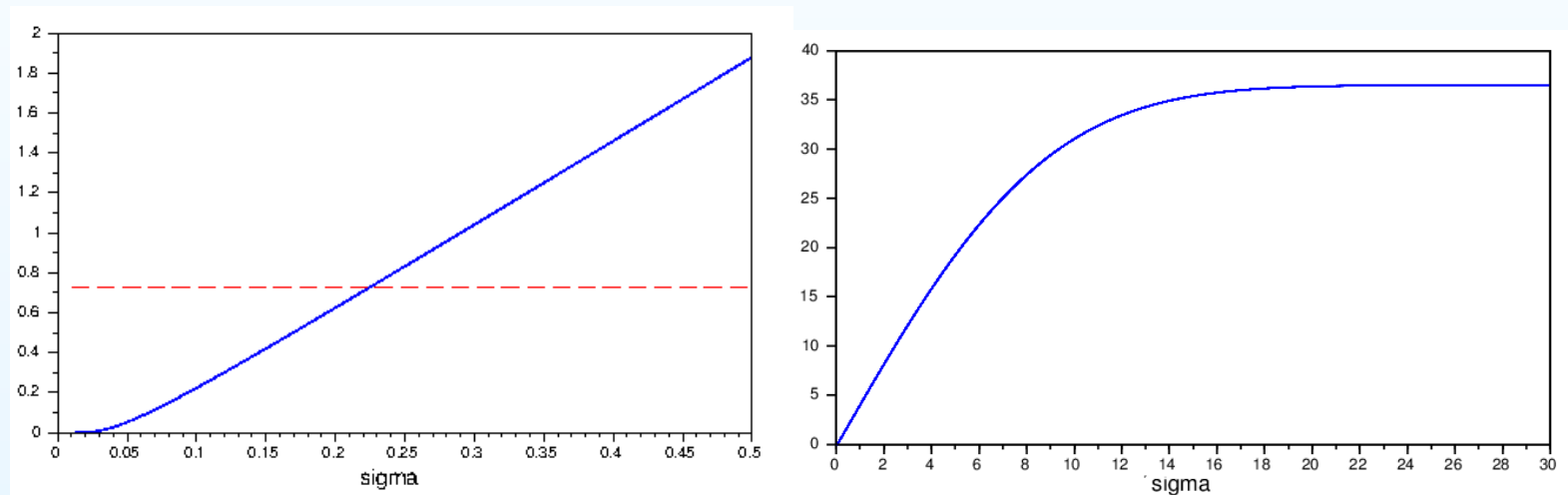
$$\frac{\partial V_{call}}{\partial \sigma} = \frac{\partial V_{put}}{\partial \sigma} = E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \sqrt{T-t}$$

Intuícia za kladným znamienkom: väčšia hodnota opcie pri vyššej volatilitate kvôli možným vyšším ziskom, strata pritom zostáva ohraničená

- Vegu potrebujeme aj pri koncepte **implikovanej volatility** → zopakujeme si (okrem úplnosti aj) preto, lebo ju budeme potrebovať v Lelandovom nelineárnom modeli

Opakovanie: implikovaná volatilita

- Implikovaná volatilita - taká hodnota volatility, pri ktorej sa Black-Scholesova cena rovná trhovej
- Numericky:



- Analyticky existencia a jednoznačnosť: rastúcosť už máme, rozsah hodnôt pre call je
 $V_0 := \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} V(S, t; \sigma) = \max(0, S - Ee^{-r\tau}),$
 $V_\infty := \lim_{\sigma \rightarrow \infty} V(S, t; \sigma) = S$
a využijeme spojitosť

Lema

- Užtočná lema pri odvodzovaní *greeks* pre call a put:

$$SN'(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N'(d_2) = 0$$

Dôkaz: N' je hustota $N(0,1)$, potom algebraické úpravy

- Podobné identity aj pri niektorých iných opciách (akcie s dividendami, chooser, ...)

Delta pre call a put

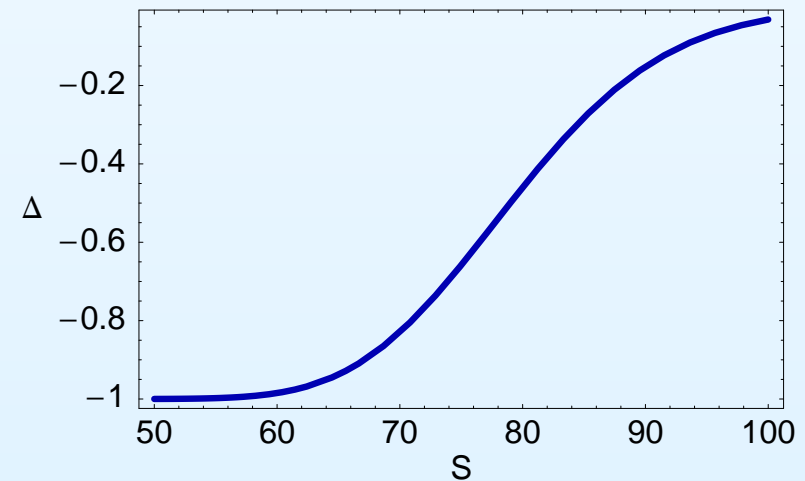
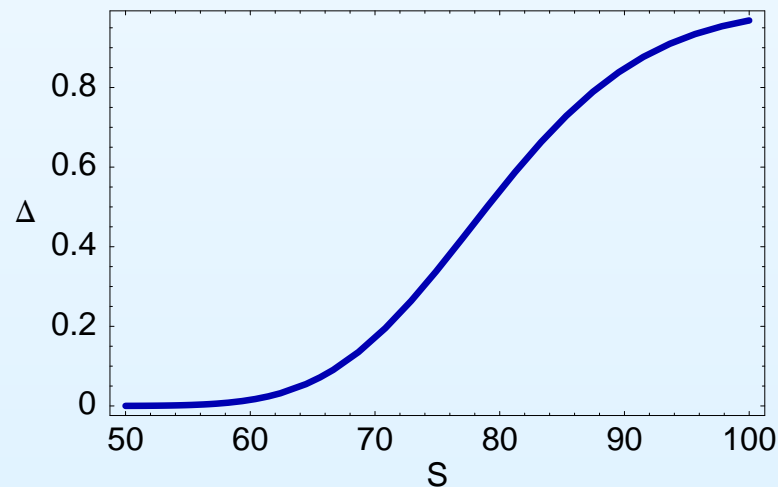
- Delta = derivácia podľa ceny akcie S
- Výsledok pre call opciu - z Black-Scholesovho vzorca:

$$\Delta^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S} = N(d_1) \in (0, 1)$$

- Pre put opciu - nemusíme derivovať, stačí použiť put-call paritu:

$$\Delta^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial S} = -N(-d_1) \in (-1, 0)$$

- Ukážka - call vľavo, put vpravo:



Delta - delta hedging

- Pripomeňme si odvodenie Black-Scholesovho modelu a konštrukciu bezrizikového portfólia:

$$\frac{Q_S}{Q_V} = -\frac{\partial V}{\partial S} = -\Delta$$

kde Q_V , Q_S je počet opcí a počet akcií v portfóliu

- Vytváraniu takéhoto portfólia sa hovorí delta hedging (hedging = zaistovanie proti riziku)

Delta - ukážka delta hedžingu

- Príklad z reálnych dát - call opcia na akciu IBM, 21.5.2002, dáta v 5-minútových intervaloch
- V čase t :
 - máme k dispozícii cenu opcie $V_{real}(t)$ a cenu akcie $S_{real}(t)$
 - vypočítame implikovanú volatilitu, t. j. riešime rovnicu

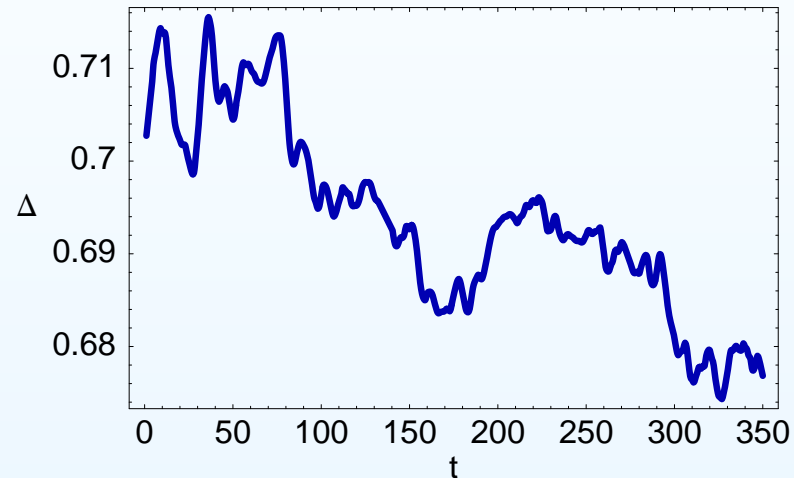
$$V_{real}(t) = V^{ec}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t)).$$

- implikovanú volatilitu $\sigma_{impl}(t)$ dosadíme do delty call opcie:

$$\Delta^{ec}(t) = \frac{\partial V^{ec}}{\partial S}(S_{real}(t), t; \sigma_{impl}(t))$$

Delta - ukážka delta hedžingu

- Ako sa počas dňa mení delta:



- Ak by sme vypísali jednu opciu, toto by bol počet akcií v našom portfóliu

Gama

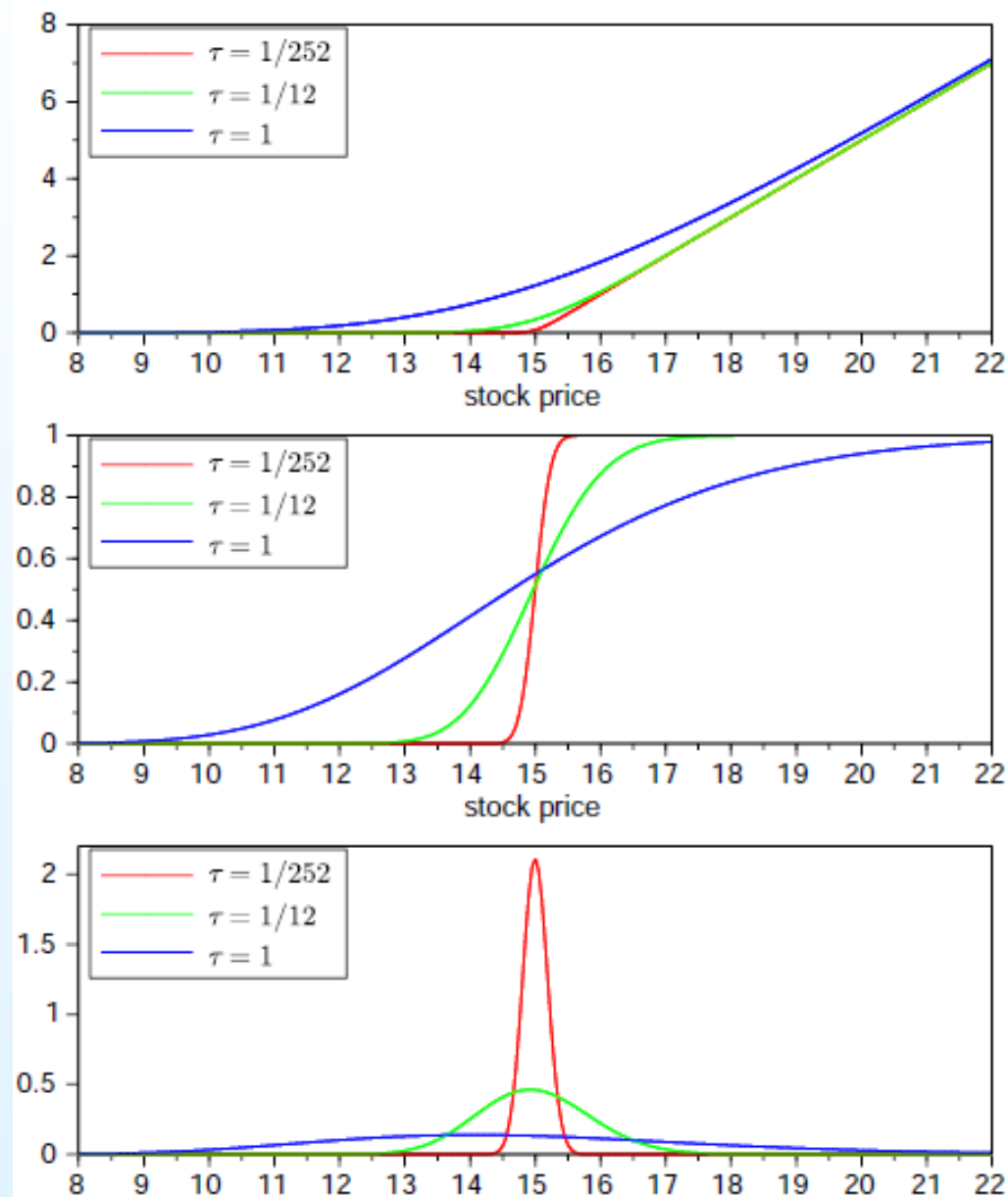
- Výpočet:

$$\Gamma^{ec} = \frac{\partial \Delta^{ec}}{\partial S} = N'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\exp(-\frac{1}{2}d_1^2)}{\sigma \sqrt{2\pi(T-t)}S} > 0$$

$$\Gamma^{ep} = \Gamma^{ec}$$

- Meria citlivosť delty na zmenu ceny akcie

Cena, delta, gama



Cena, delta, gama

- Súčasne nastáva:
 - cena opcie je "skoro rovná čiara"
 - delta sa veľmi nemení pri malej zmene ceny akcie
 - gama je skoro nulová
- Takisto súčasne:
 - graf ceny opcie má veľkú krivosť
 - delta sa veľmi mení pri malej zmene ceny akcie
 - gama je výrazne nenulová

Vega, ró, theta

- Ró

- call: $P^{ec} = \frac{\partial V^{ec}}{\partial r} = E(T - t)e^{-r(T-t)} N(d_2) > 0$

- put: $P^{ep} = \frac{\partial V^{ep}}{\partial r} = -E(T - t)e^{-r(T-t)} N(-d_2) < 0$

- Theta:

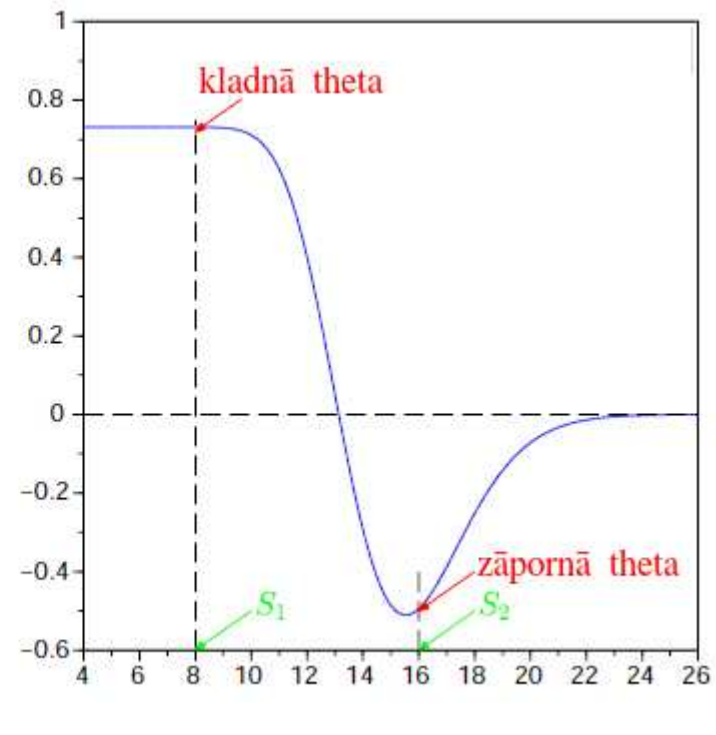
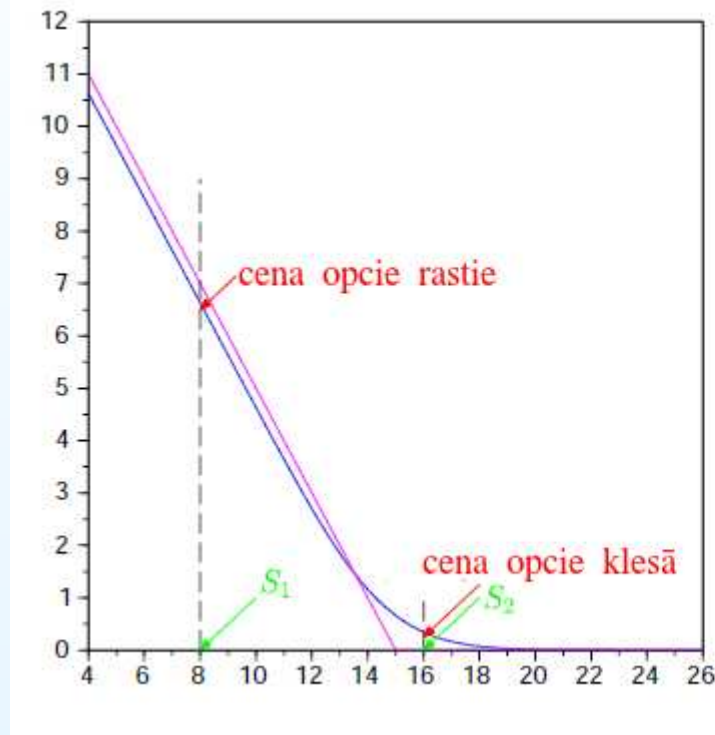
- call: z finančnej mat. vieme, že ak akcia nevypláca dividendy, americkú call opciu sa neoplatí uplatniť skôr
⇒ cena európskej a americkej opcie je rovná ⇒

- $\Theta^{ec} < 0$

- put: nemá jednoznačne určené znamienko

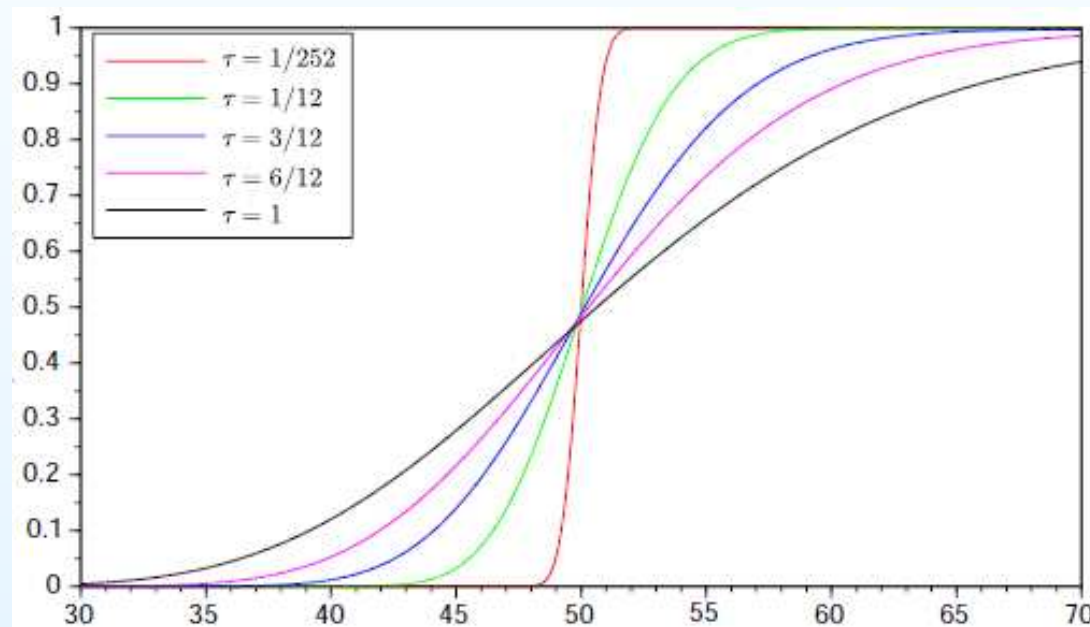
Vega, ró, theta

- Theta putu:



Cvičenie: "cash-or-nothing" opcia

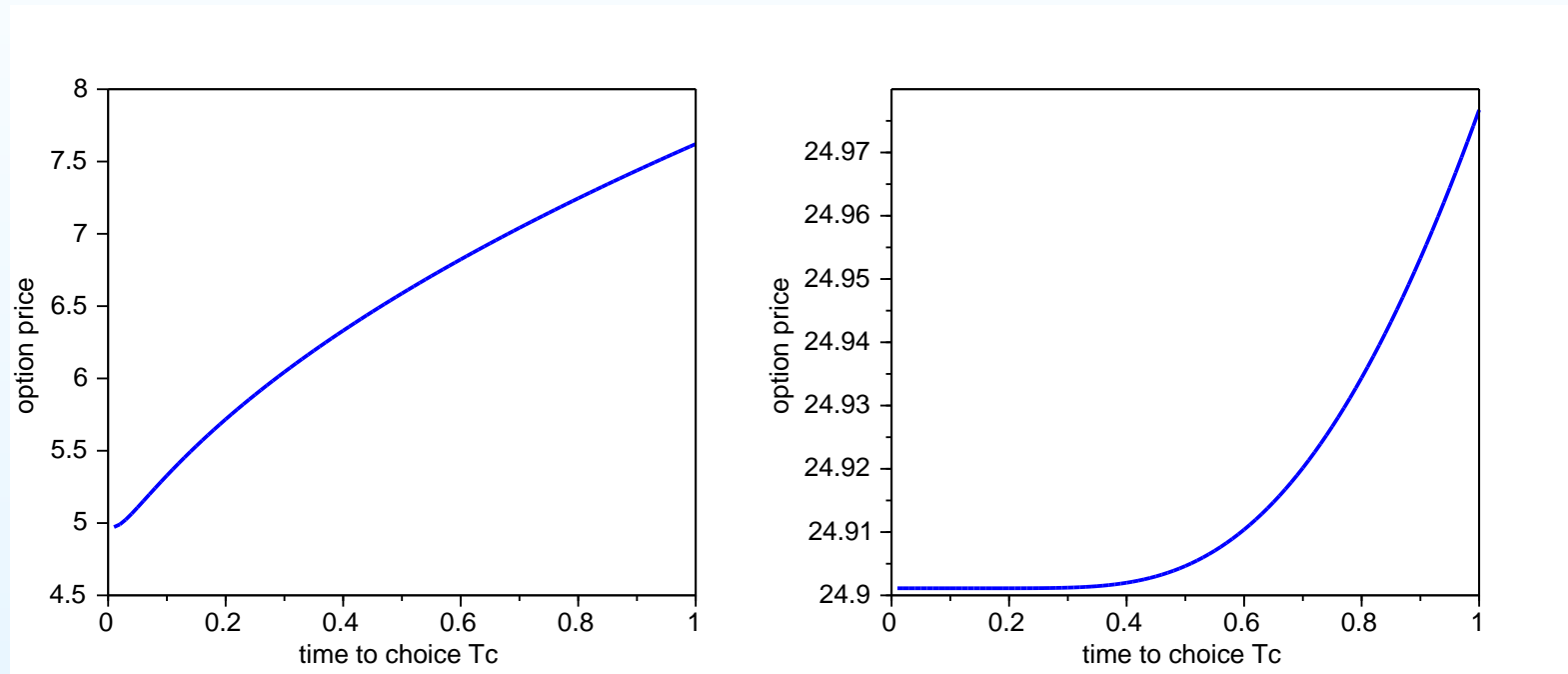
- "Cash-or-nothing" opcia: vyplatí 1 USD, ak akcia v čase expirácie prekročí hodnotu E , inak 0.
- Cena opcie:



- Na základe interpretácie *greeks* - načrtnite priebeh delty a veyu ako funkcií ceny akcie. Potom nakreslite presné grafy.

Cvičenie: chooser opcia

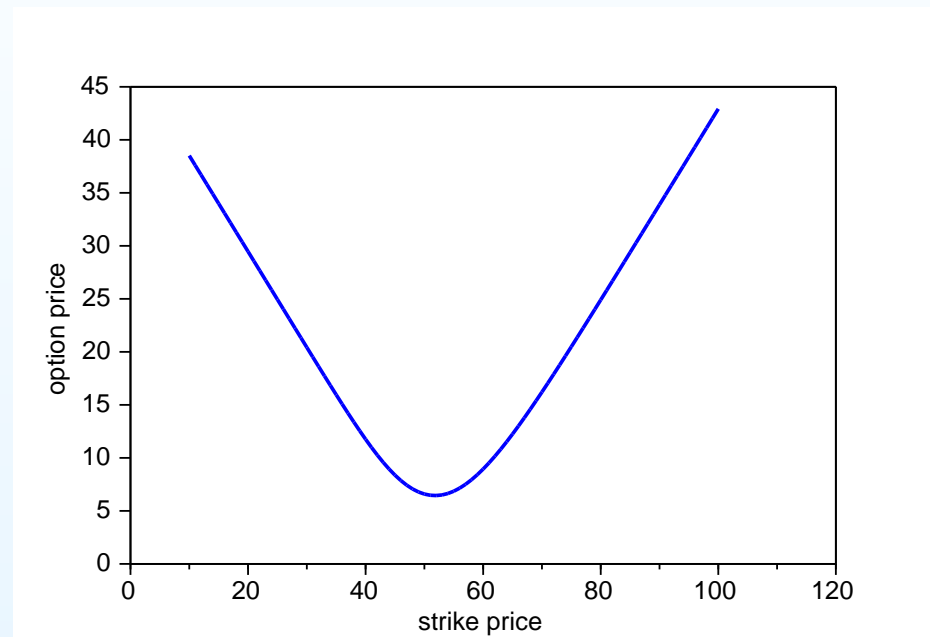
- Závislosť od času T_c voľby typu opciu (call/put):



- Dokážte, že táto závislosť je rastúca.
- Akú to má finančnú interpretáciu?

Cvičenie: chooser opcia

- Závislosť od expiračnej ceny E :



- Intuitívne: prečo takýto priebeh?
- Dokážte, že táto závislosť je konvexná.
- Nájdite expiračnú cenu, pri ktorej je cena opcie minimálna. Prečo je užitočné vedieť, že funkcia je konvexná?

Cvičenie: citlivosť delty na volatilitu

- Espen Haug v článku *Know your weapon*:

One fine day in the dealing room my risk manager asked me to get into his office. He asked me why I had a big outright position in some stock index futures - I was supposed to do "arbitrage trading". That was strange as I believed I was delta neutral: long call options hedged with short index futures. I knew the options I had were far out-of-the-money and that their DdeltaDvol was very high. So I immediately asked what volatility the risk management used to calculate their delta. As expected, the volatility in the risk-management-system was considerable below the market and again was leading to a very low delta for the options. This example is just to illustrate how a feeling of your DdeltaDvol can be useful. If you have a high DdeltaDvol the volatility you use to compute your deltas becomes very important.⁽¹⁾

- Otázky:
 - Ako závisí delta od volatility použitej pri výpočte?
 - Vysvetlite tvrdenia (1) a (2)