

# *Lelandov model: európska call a put opcia*

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

# Lelandova PDR - zopakovanie

- Lelandova PDR pre cenu derivátu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[ 1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sign} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

- Rovnica platí pre  $S > 0, t \in [0, T]$ , pridáva sa k nej koncová podmienka  $V(S, T)$  v závislosti od typu derivátu, napr.  $V(S, T) = \max(0, S - E)$  pre  $S > 0$  v prípade call opcie
- Nelineárna parciálna diferenciálna rovnica kvôli členu obsahujúcemu funkciu signum
- Pripomeňme si, že pre Black-Scholesovu cenu call a put opcie platí  $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} > 0$  (kladná gama)  $\Rightarrow \operatorname{sign} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) = 1$

# Lelandova PDR - call a put

- Ak do Lelandovej PDR dosadíme Black-Scholesovu cenu callu, resp. putu s upravenou volatilitou  $V(S, t; \tilde{\sigma})$ :

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[ 1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]$$

dostaneme:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[ 1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sign} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV =$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \left[ 1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0$$

## Lelandova PDR - call a put

- To znamená, že Black-Scholesovu cenu callu, resp. putu s upravenou volatilitou  $V(S, t; \tilde{\sigma})$ :

$$\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[ 1 - \frac{c}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]$$

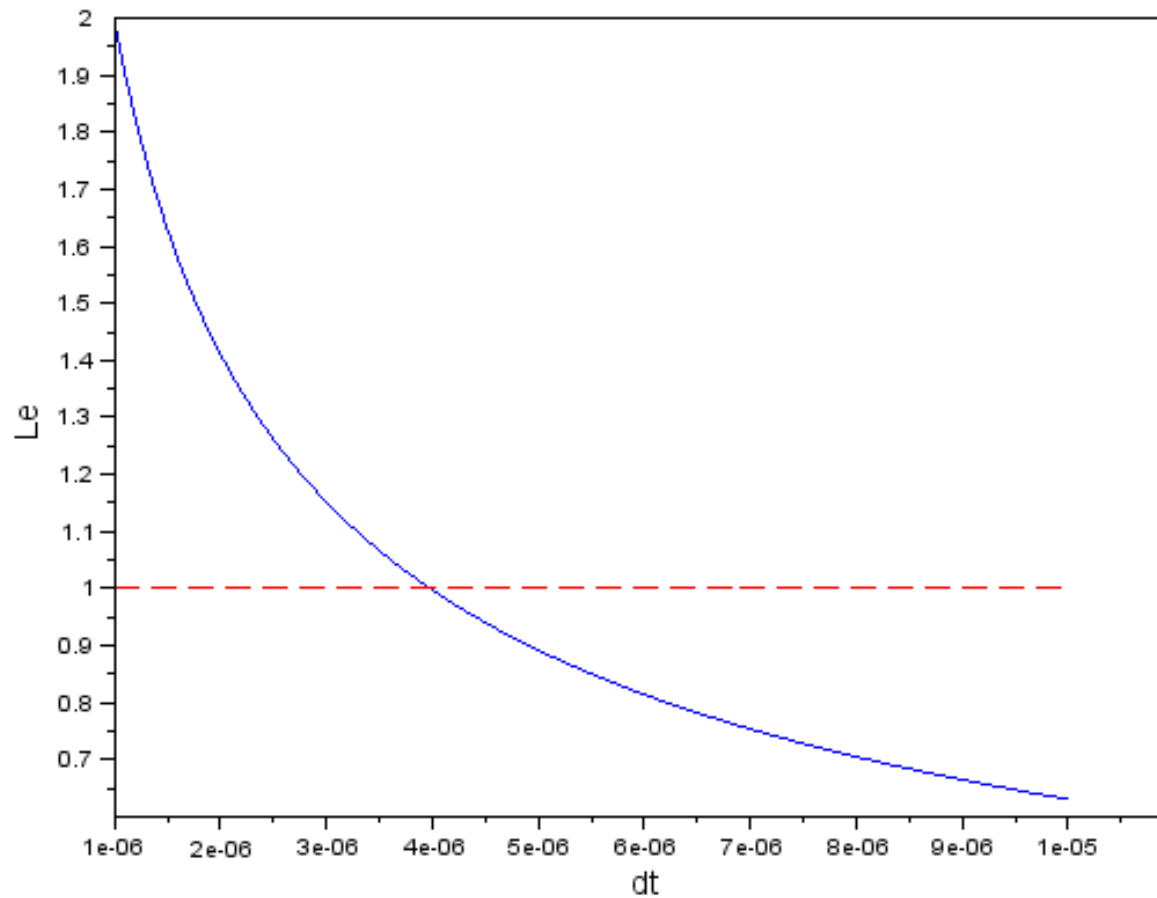
je riešením Lelandovej rovnice pre európsky call, resp. put.

- Výraz pre  $\tilde{\sigma}^2$  musí byť kladný  $\Rightarrow$  to dáva ohraničenie na prípustné časy  $\Delta t$  - t.j. časy medzi dvomi zaist'ovaniami portfólia (parametre  $\sigma, c$  sú dané):

$$\Delta t > \frac{2}{\pi} \frac{c^2}{\sigma^2}$$

# Ohraničenie na prípustné časy $\Delta t$

GRAFICKY: závislosť  $Le$  od  $\Delta t$  pre  $c = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\sigma = 0.2$



## Ohraničenie na prípustné časy $\Delta t$

---

Uvažujme 252 pracovných dní v roku a burzu otvorenú 7 hodín denne  $\Rightarrow \Delta t$  musí byť viac ako cca 0.42 min.

## Príklad výpočtu ceny opcie I.

- Zoberme  $\Delta t = 5$  minút, teda  $\Delta t = 5 / (60 * 7 * 252)$
- Lelandovo číslo je potom prípustné (menšie ako 1):

```
> dt <- 5 / (60 * 7 * 252)
> le(dt)
[1] 0.2902151
```

- Upravená volatilita, ktorá sa bude dosadzovať do Black-Scholesovho vzorca:

```
> sigmaTC <- sqrt((1 - le(dt)) * (sigma^2))
> sigmaTC
[1] 0.1684975
```

## Príklad výpočtu ceny opcie I.

- Vypočítame cenu call opcie s exspiračnou cenou  $E = 110$  a exspiráciou o  $\tau = 1$  rok, ak úroková miera je  $r = 1\%$  a cena akcie je  $S = 100$
- Pre porovnanie aj cena bez transakčných nákladov:

```
> Call(100,110,0.01,sigmaTC,0.5)
[1] 1.610899
>
> Call(100,110,0.01,sigma,0.5)
[1] 2.339421
```



## Príklad výpočtu ceny opcie II.

- Taká istá opcia pri  $\Delta t = 1/252$ , t.j. 1 deň:

```
> dt=1/252
> le(dt)
[1] 0.03166506
>
> sigmaTC <- sqrt((1-le(dt))*(sigma^2))
> sigmaTC
[1] 0.196808
>
> Call(100,110,0.01,sigmaTC,0.5)
[1] 2.263035
```

# Bid a ask ceny opcí v Lelandovom modeli

---

- Payoff derivátu označme  $\bar{V}(S)$ , napr.  $\max(0, S - E)$  pre call
- Oceňujme derivát s payoffom  $-\bar{V}(S)$
- Call a put opcia: Black-Scholesova cena s upravenou volatilitou  $\sigma_{TC}^2 = (1 + Le)\sigma^2$

Zhrnutie pre call a put:

- bid cena: Black-Scholesova cena s upravenou volatilitou  $\sigma_{TC}^2 = (1 - Le)\sigma^2$
- ask cena: Black-Scholesova cena s upravenou volatilitou  $\sigma_{TC}^2 = (1 + Le)\sigma^2$

# Implikované parametre

- Ak máme bid a ask ceny akcie a opcie, vieme vypočítať
  - implikovanú volatilitu
  - implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia(t.j. také hodnoty, pri ktorých sa teoretická bid a ask cena opcie bude rovnať skutočnej)

## VSTUPY:

- Akcia - bid a ask cena  $S_{bid}, S_{ask}$
- Opcia - bid a ask cena  $V_{bid}, V_{ask}$ , exspiračná cena  $E$ , čas zostávajúci do exspirácie  $\tau$
- Ostatné parametre trhu: úroková miera  $r$

# Implikované parametre

## POSTUP:

- Z bid a ask ceny akcie vypočítame  $S = (S_{ask} + S_{bid})/2$  a  $c = (S_{ask} - S_{bid})/S$
- Pomocou  $S, E, r, \tau$  a
  - $V_{bid}$  vypočítame Black-Scholesovu implikovanú volatilitu, to je  $\sqrt{(1 - Le)\sigma^2} := \sigma_{bid}$
  - $V_{ask}$  vypočítame Black-Scholesovu implikovanú volatilitu, to je  $\sqrt{(1 + Le)\sigma^2} := \sigma_{ask}$
- Riešením sústavy rovníc  $(1 - Le)\sigma^2 = \sigma_{bid}^2$ ,  $(1 + Le)\sigma^2 = \sigma_{ask}^2$  vypočítame implikovanú volatilitu  $\sigma$  a Lelandovo číslo  $Le$
- Z definície Lelandovho čísla nakoniec vyjadríme implikovaný čas medzi dvoma zmenami portfólia  $\Delta t$

# Implikované parametre - príklad

PRÍKLAD:

- Akcia:

<b>General Motors Company (GM)</b> - NYSE ★ Follow			
<b>37.65</b> ↑ 0.11 (0.29%) 9:44AM EST - Nasdaq Real Time Price			
Prev Close:	<b>37.54</b>	Day's Range:	<b>37.54 - 38.01</b>
Open:	N/A	52wk Range:	<b>27.11 - 41.85</b>
Bid:	<b>37.90</b> x 1000	Volume:	<b>594,013</b>
Ask:	<b>37.94</b> x 400	Avg Vol (3m):	<b>26,332,800</b>

# Implikované parametre - príklad

- Call opcia:

**GM Mar 2014 37.000 call (GM140322C00037000) - OPR**

**1.00** ↑ **0.10 (11.11%)** Mar 6

Prev Close:	<b>0.90</b>	Day's Range:	<b>1.00 - 1.24</b>
Open:	<b>1.24</b>	Contract Range:	<b>N/A - N/A</b>
Bid:	<b>1.20</b>	Volume:	<b>434</b>
Ask:	<b>1.27</b>	Open Interest:	<b>64,168</b>
Strike:	<b>37.00</b>		
Expire Date:	<b>22-Mar-14</b>		

# Implikované parametre - príklad

- Úrokové miery:

<b>US Treasury Bonds Rates</b>				
<b>Maturity</b>	<b>Yield</b>	<b>Yesterday</b>	<b>Last Week</b>	<b>Last Month</b>
3 Month	0.04	0.04	0.04	0.04
6 Month	0.07	0.07	0.08	0.04
2 Year	0.37	0.35	0.31	0.32
3 Year	0.77	0.71	0.66	0.65
5 Year	1.64	1.57	1.47	1.49
10 Year	2.81	2.73	2.65	2.67
30 Year	3.74	3.69	3.58	3.65

## Implikované parametre - príklad

- Teda máme:

```
> Sbid=37.90; Sask=37.94
> Vbid=1.20; Vask=1.27
> E=37
> r=0.04/100
>
> tau=11/252
>
> S=(Sask+Sbid)/2
> c=(Sask-Sbid)/S
```

- Spresníme výpočet implikovanej volatility (parameter *tol* vo funkcii *uniroot*):

```
> ImplVolCall <- function(S,E,r,tau,V) {
+   pom <- function(s) V-Call(S,E,r,s,tau)
+   uniroot(pom, lower=0.0001, upper=10, tol=10^(-10))$root}
```



# Implikované parametre - príklad

- Vypočítame implikované volatility:

```
> sigmaAsk=ImplVolCall(S,E,r,tau,Vask)
> sigmaAsk
[1] 0.2298972
>
> sigmaBid=ImplVolCall(S,E,r,tau,Vbid)
> sigmaBid
[1] 0.2039042
```

- Poznámky:
  - $S$  je spoločné (nie  $S_{bid}, S_{ask}$ )
  - implikované volatility z Black-Scholesa

## Implikované parametre - príklad

- Riešením sústavy rovníc

$$(1 - Le)\sigma^2 = \sigma_{bid}^2, (1 + Le)\sigma^2 = \sigma_{ask}^2$$

vypočítame Lelandovo číslo  $Le$  a implikovanú volatilitu  $\sigma$  :

```
> Le=(sigmaAsk^2-sigmaBid^2)/(sigmaAsk^2+sigmaBid^2)
> sigma=sigmaAsk/sqrt(1+Le)
> sigma
[1] 0.2172898
```

## Implikované parametre - príklad

- Z definície Lelandovho čísla vyjadríme implikovaný čas  $\Delta t$ :

```
> dt=(2/pi)*(c/(sigma*Le))^2  
> dt*252 # v dnoch  
[1] 0.2651599
```

### ZÁVER:

- implikovaná volatilita  $\sigma_{impl} = 0.217$
- implikovaný čas medzi dvomi zmenami portfólia  $\Delta t_{impl}$  je cca  $1/4$  dňa