

Finančné deriváty: informácie ku skúške

1 Všeobecné poznámky

Tematicky je skúška podobná písomkám počas semestra, ale náročnosť je vyššia. Predpokladá sa teda príprava na skúšku, nielen "veď som z toho už napísal písomky", hoci možno aj "s celkom dobrým výsledkom". Treba vedieť získané vedomosti navzájom kombinovať a využiť na riešenie nových problémov, nielen naučiť sa zopakovať výpočty, dôkazy a pod. z prednášok a cvičení. Samostatné prepočítanie (nielen pozrieť si výpočty niekoho iného) príkladov na precvičenie a zadaní z prednášok považujem za dostatočnú prípravu.

2 Vzorová písomná časť skúšky (open book, 90 minút)

V časti TRUE/FALSE sa hodnotí len správnosť odpovede, v ostatných príkladoch píšete aj postup a jeho zdôvodnenie, za ktoré môžete získať primeraný počet bodov, aj keď nebudú úplne správne. Musia však byť napísané v písomke, nie dodatočne vysvetľované pri opravovaní písomky.

1. **True/false, max. 10 bodov.** 20 otázok s hodnotením: správna odpoveď plus 0.5 bodu, nesprávna odpoveď mínus 0.5 bodu, žiadna odpoveď 0 bodov. Na konci tohto pdf súboru je ukážka takéhoto súboru otázok.
2. **Max. 5 bodov.** Predpokladajme, že cena akcie sa riadi nie geometrickým Brownovým pohybom, ale obyčajným Brownovým pohybom (ako to robil na začiatku 20. storočia Bachelier). Ďalej predpokladajme, že úroková miera je nulová (tým sa zase približujeme k dnešnej situácii). Ostatné predpoklady zostávajú rovnaké ako v klasickom Black-Scholesovom modeli. Odvodte cenu derivátu, ktorý v čase expirácie vyplatí sumu, ktorá sa rovná druhej mocnine aktuálnej ceny akcie.
3. Uvažujme Dothanov model pre krátkodobú úrokovú mieru v tvare $dr = \sigma r dw$, kde w je Wienerov proces.
 - (a) **Max. 5 bodov.** Predpokladajme, že dnešná hodnota úrokovej miery r v tomto modeli je 0.0112425 percenta (úroková miera 3 mesačných bezkupónových kanadských dlhopisov z 2. apríla 2018 ¹). Nájdite hustotu pravdepodobnostného rozdelenia úrokovej miery o mesiac (bude obsahovať neznámy parameter σ).
 - (b) **Max. 5 bodov.** Majme časový rad hodnôt úrokovej miery, ďalej budeme pracovať s ich logaritmi. Pre zlogaritmované dáta odvodte funkciu vierohodnosti, ktorej maximalizáciou by sme našli odhad parametra σ .
4. **Max. 5 bodov.** Uvažujme binárnu opciu, ktorá vyplatí 1 USD, ak cena akcie v čase expirácie prekročí 100 USD. Predpokladajme, že dnešná cena akcie je veľmi malá. Intuitívne, vyššia volatilita je pre nás v tejto situácii výhodnejšia, lebo inak (len pomocou driftu) sa do priaznivého pásma ceny akcie zrejme nedostaneme. Sformulujte túto myšlienku ako tvrdenie o vege tejto opcie a dokážte ho.

¹<https://www.bankofcanada.ca/rates/interest-rates/bond-yield-curves/>

3 Kostra predmetu

- Súčasťou ústnej skúšky je otázka z kostry predmetu, jej zodpovedanie na aspoň 75 percent bodového zisku (t. j. je v poriadku nevedieť odpovedať na nejakú menej dôležitú otázku, ale nie je v poriadku nevedieť niečo základné, resp. vedieť odpovedať len na časť otázky) je nutnou podmienkou úspešného absolvovania skúšky. Treba vedieť odpovedať na otázky týkajúce sa tejto témy, zopakovanie niečoho, čo sa študent naučil naspamäť a poriadne tomu nerozumie, na prejdenie nestačí.
- Kostra obsahuje štátnicové otázky rozdelené do kratších, konkrétnejšie zameraných otázok.
- Otázky z kostry budú vybrané z nasledovných:
 1. Odvodenie Black-Scholesovho modelu prístupom Blacka a Scholesa.
 2. Odvodenie Black-Scholesovho modelu prístupom Mertona.
 3. Postup riešenia PDR pre cenu derivátu transformáciou na RVT. *Black-Scholesova rovnica bude zadaná, netreba si ju pamätať.*
 4. Citlivosť ceny calla put opcie na parametre: odvodenie delty akcie (s dôkazom lemy, ktorá sa tu využíva), postup pri delta hedžingu, interpretácia ostatných parametrov citlivosti - čo vyjadrujú, aké majú znamienko a vysvetliť jeho finančnú interpretáciu *Black-Scholesov vzorec bude zadaný.*
 5. Oceňovanie amerických derivátov - formulácia v tvare úlohy s voľnou hranicou a transformácia na úlohu lineárnej komplementarity pre call opciu. *Black-Scholesova rovnica bude zadaná.*
 6. PSOR metóda - formulácia algoritmu, uvedenie predpokladov a dôkaz, že pri nich je limita generovanej postupnosti (konvergenciu môžete predpokladať) riešením zadanej úlohy. *Diskrétna úloha lineárnej komplementarity bude zadaná, ako aj vzorec pre Gauss-Seidelovu iteráciu.*
 7. Odvodenie PDR pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom modeli krátkodobej úrokovej miery.
 8. Stochastická diferenciálna rovnica vo Vašíčkovom a Cox-Ingersoll-Rossovom modeli úrokových mier (s interpretáciou, čo nám to hovorí o procese). Transformácia PDR pre cenu dlhopisu na riešenie systému ODR pri vhodne zvolenej trhovej cene rizika. *PDR pre cenu dlhopisu vo všeobecnom tvare bude zadaná.*

4 Priebeh ústnej skúšky

- Vytiahnutie sady 3 otázok, každá otázka má hodnotu 10 bodov:
 1. 1 otázka z kostry
 2. 1 otázka na vysvetlenie výpočtu (tvrdenia, dôkazu, príkladu, ...) z prednášky/cvičenia alebo riešenie úlohy zadanej ako DÚ na prednáške. Black-Scholesova PDR, vzorec pre cenu a pod. bud zadané, netreba si ich pamätať.
 3. 1 otázka na samostné skombinovanie študovaných tém
- 40 minút príprava
- 15 minút odpoveď
- 5 minút opravenie písomnej časti skúšky - môže byť spojené s otázkou typu "čo znamená tento výpočet", na ktorú je potrebné vedieť odpovedať, odpoveď v zmysle "našiel som to vyriešené na internete, ale nerozumiem tomu"², resp. neodpovedanie znamená 0 bodov za príslušný príklad

²skutočná odpoveď z minulosti

Ak študent skúšku úspešne absolvoval, ale rozmýšľa nad opravným termínom, v AIS-e je možné zadať možnosť "môže sa prihlásiť na termín aj napriek udelenému hodnoteniu". Nevzniká tým nijaká povinnosť, ak sa nakoniec na opravný termín neprihlási, známka mu zostane, ale má možnosť prihlásenia na opravný termín. Defaultne to po spravení skúšky možné nie je, treba mi dať vedieť, že mám túto možnosť označiť. V prípade takéhoto opravného termínu sa opakuje celá skúška - písomná aj ústna.

5 Vzorová ústna časť skúšky (close book)

1. Odvodenie PDR pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom modeli krátkodobej úrokovej miery.
2. V prípade akcie bez dividend je jedno, ako dlho držíme akciu, neprináša nám to nijaký zisk. Z toho vyplýva riešenie Black-Scholesovej PDR v prípade $q = 0$ s koncovou podmienkou $V(S, T) = S$ uhádnutím riešenia $V(S, t) = S$ a spravením skúšky. V prípade dividend to už jedno nie je. Ako sa prejaví vplyv spojitých dividend, t. j. aké je riešenie rovnice

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

s tou istou koncovou podmienkou $V(S, t) = S$?

3. Cenu akcie modelujeme geometrickým Brownovým pohybom. Vypočítajte kovarianciu medzi hodnotami ceny akcie v časoch s a t . Bez dôkazu môžete použiť, že $E[e^{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$.

Finančné deriváty - ukážka zadania na skúške
Časť 1 – TRUE/FALSE

- Píšte iba odpovede.
- Hodnotenie:
 - správna odpoveď 1 bod
 - nesprávna odpoveď mínus 1 bod
 - žiadna odpoveď 0 bodov

Ak nie je povedané inak, uvažujeme Black-Scholesov model a akciu, ktorá nevypláca dividendy.

Volatilita Winerovho procesu je rastúca funkcia času.	
V Cox-Ingersoll-Rossovom modeli úrokových mier je volatilita krátkodobej úrokovej miery konštantná.	
Cena binárnej opcie je rastúcou funkciou volatility.	
Oceňovanie americkej put opcie sa dá transformovať na riešenie úlohy lineárnej komplementarity.	
Ak je matica sústavy lineárnych rovníc kladne definitná, tak SOR metóda konverguje pre ľubovoľný kladný parameter omega.	
Cena európskej call opcie je rastúcou funkciou úrokovej miery.	
Riešením Fokker-Planckovej PDR je distribučná funkcia zadaného stochastického procesu.	
Vo Vašíčkovom modeli úrokovej miery majú záporné úrokové miery kladnú pravdepodobnosť.	
Payoff pre ázijské opcie závisí aj od priebehu ceny akcie, nielen od jej hodnoty v čase expirácie.	
Predpoklad o drifte procesu modelujúceho cenu akcie v Black-Scholesovom modeli nemá vplyv na výslednú PDR pre cenu derivátu (t. j. pri inom drifte by PDR vyšla rovnaká).	
Lelandov model sa od Black-Scholesovho líši tým, že uvažuje náhodný vývoj úrokovej miery.	
Delta derivátu, ktorého payoff je $\max(0, (S-20)*(S-30))$, je vždy kladná.	
Oceňovanie bariérových opcií vedie na riešenie PDR na časovo závislej oblasti.	
Pri oceňovaní americkej call opcie je voľná hranica (teda hranica predčasného uplatnenia) vopred zadaná funkcia.	
PSOR metóda slúži na riešenie sústavy lineárnych rovníc.	
Spektrálny polomer matice je hodnota jej najmenšieho vlastného čísla.	
Gama call a put opcie je rovnaká.	
Vega call a put opcie je rovnaká.	
Delta call opcie je vždy kladná a delta put opcie je vždy záporná.	
Ak akcia vypláca spojitú dividendu, tak jej delta je menšia v porovnaní s prípadom, že dividendy nevypláca (ostatné parametre uvažujeme konštantné).	