

Finančné deriváty: informácie ku skúške

1 Všeobecné poznámky

Tematicky je skúška podobná písomkám počas semestra, ale náročnosť je vyššia. Predpokladá sa teda príprava na skúšku, nielen "veď som z toho už napísal písomky", hoci možno aj "s celkom dobrým výsledkom". Treba vedieť získané vedomosti navzájom kombinovať a využiť na riešenie nových problémov, nielen naučiť sa zopakovať výpočty, dôkazy a pod. z prednášok a cvičení. Samostatné prepočítanie (nielen pozrieť si výpočty niekoho iného) príkladov na precvičenie a zadaní z prednášok považujem za dostatočnú prípravu.

2 Vzorová prvá časť skúšky (open book, 90 minút)

- V časti TRUE/FALSE sa hodnotí len správnosť odpovede, v ostatných príkladoch píšete aj postup a jeho zdôvodnenie, za ktoré môžete získať primeraný počet bodov, aj keď nebudú úplne správne.
- Dva príklady na počítanie budú vybrané tak, aby pri ich riešení nebolo treba veľa písania, a teda sa budú dať pohodlne zapísať so testu na classmarker.com. Alternatívne je možné odfoťiť ich a poslať v časovom limite písomky na mail.

1. **True/false, max. 15 bodov.** 30 otázok, za každú správnu odpoveď 0,5 b. Ukážka:

- i Disperzia Wienerovho procesu v čase t je rovná t .
- ii Geometrický Brownov pohyb má normálne rozdelenie.
- iii Stredná hodnota procesu $dx = 0,5(1-x)dt + 0,1dw$ so začiatočnou podminkou $x(0) = 2$ konverguje k 1 pre čas idúci do nekonečna.
- iv Disperzia procesu $dx = 0,5(1-x)dt + 0,1dw$ so začiatočnou podminkou $x(0) = 2$ rastie do nekonečna.
- v Výnos akcie má pri platnosti Black-Scholesovho modelu normálne rozdelenie.
- vi Black-Scholesov model predpokladá, že volatilita akcie sa v čase nemení.
- vii Cena call opcie v Black-Scholesovom modeli je rastúca funkcia premennej S .
- viii Cena call opcie v Black-Scholesovom modeli je rastúca funkcia premennej τ .
- ix Ak sú úrokové miery záporné, tak put-call parita neplatí.
- x Cena call opcie musí byť konvexnou funkciou expiračnej ceny, inak je na trhu arbitráž.
- xi Uvažujme oceňovanie amerických call opcií. Ak je cena akcie menšia ako voľná hranica, tak opciu máme uplatniť (a nie ďalej držať).
- xii Sústava lineárnych rovníc, ktorá vznikne pri implicitnej schéme na riešenie rovnice vedenia tepla, sa dá vždy vyriešiť Gauss-Seidelovu numerickou schémou (t. j. táto schéma bude konvergovať).
- xiii Sústava lineárnych rovníc, ktorá vznikne pri implicitnej schéme na riešenie rovnice vedenia tepla, sa dá vždy vyriešiť SOR numerickou schémou pre ľubovoľné $\omega > 0$ (t. j. táto schéma bude konvergovať).
- xiv Ak v SOR metóde na riešenie sústavy lineárnych rovníc zvolíme $\omega < 0$, tak metóda určite nebude konvergovať.

- xv Vega binárnej opcie v Black-Scholesovom modeli môže byť (v závislosti od parametrov) kladná aj záporná.
- xvi Gama put opcie v Black-Scholesovom modeli môže byť (v závislosti od parametrov) kladná aj záporná.
- xvii Podmienené rozdelenie krátkodobej úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli pri známej dnešnej hodnote je normálne.
- xviii Riešením Fokker-Planckovej PDR je distribučná funkcia náhodného procesu.
- xix Ak akcia vypláca dividendy, tak Black-Scholesova cena call akcie leží vždy nad payoffom.
- xx Ak akcia nevypláca dividendy, tak Black-Scholesova cena put akcie leží vždy nad payoffom.
- xxi Náhodný proces $w(t) \times (1 + t^2)$ má konštantnú strednú hodnotu.
- xxii Ak by sme v Black-Scholesovom modeli zobrali úrokovú mieru náhodnú a modelovali ju podľa Vašíčkovho modelu, PDR pre cenu derivátu by zostala rovnaká.
- xxiii Cena derivátu v Black-Scholesovom modeli nezávisí od driftového parametra μ v predpoklade o cene akcie $dS = \mu S dt + \sigma S dw$.
- xxiv Cena americkej opcie nemôže klesnúť pod payoff.
- xxv PSOR metóda sa používa na riešenie sústavy lineárnych rovníc.
- xxvi Riešime sústavu lineárnych rovníc iteračnou schémou v tvare $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + g$. Ak je spektrálny polomer iteračnej matice T menší ako 1, tak metóda konverguje.
- xxvii Pri oceňovaní amerických opcií sme riešili sústavu lineárnych rovníc iteračnou metódou (Gauss-Seidel, SOR).
- xxviii Ak je payoff derivátu kladný iba na intervale $[10, 20]$, stačí to na to, aby Black-Scholesova cena tohto derivátu bola vždy ostro kladná pre ľubovoľne malé $\tau > 0$ a ľubovoľne veľké S .
- xxix Ak cenu akcie modelujeme geometrickým Brownovým pohybom $dS = 0.1S dt + 0.3S dw$ a stredná hodnota jej ceny v budúcnosti je rastúca funkcia času.
- xxx Prírastky geometrického Wienerovho procesu na neprekrývajúcich sa intervaloch sú nezávislé.

2. **7.5 bodov.** Uvažujme Black-Scholesove predpoklady a dve akcie, ktoré sa riadia geometrickými Brownovými pohybmi (teda všetky tie predpoklady, ktoré sme mali pri odvodení Margrabeho vzorca). Odvoďte cenu derivátu, ktorý má payoff

$$V(S_1, S_2, T) = \max(S_1, S_2).$$

Cenu spread opcie nemusíte vypisovať, stačí napísať "kde [nejaké označenie] je cena spread opcie s parametrami [špecifikujete parametre]".

3. **7.5 bodov.** Uvážujme model pre cenu akcie v tvare

$$dS = \mu S dt + 0.2S dw.$$

Vypočítajte pravdepodobnosť, že výnos akcie na časovom intervale $[0, T]$ bude vyšší ako výnos v prípade, keby sme namiesto kúpy akcie v čase $t = 0$ vložili jej hodnotu na bezrizikový účet a nechali ju úročiť úrokovou mierou $r = 0.02$. Určte limitu tejto pravdepodobnosti pre $T \rightarrow \infty$ v závislosti od parametra μ .

3 Kostra predmetu

- Súčasťou skúšky je otázka z kostry predmetu, jej zodpovedanie na aspoň 75 percent bodového zisku (t. j. je v poriadku nemať odvodené všetko, ale nemôže chýbať výrazná časť) je nutnou podmienkou úspešného absolvovania skúšky.
- Treba písať vysvetlenia k jednotlivým krokom (nie odpísať slajdy, ale vysvetliť ich jednotlivé kroky), nevynechávať medzikroky (výrazmi typu "z toho po úprave výjde" a pod. - spravte tie úpravy) a pod. Túto časť je možné si dopredu pripraviť (aj dať si vypracované zadania skontrolovať, resp. vyjasniť si, čo treba, ak svoje otázky/riešenia pošlete aspoň 2 pracovné dni pred skúškou) a potom použiť pri opakovaní na štátnice.

- Otázky z kostry budú vybrané z nasledovných:
 1. Odvodenie Black-Scholesovho modelu prístupom Blacka a Scholesa.
 2. Odvodenie Black-Scholesovho modelu prístupom Mertona.
 3. Postup riešenia PDR pre cenu derivátu transformáciou na RVT.
 4. Citlivosť ceny calla put opcie na parametre: odvodenie delty akcie (s dôkazom lemy, ktorá sa tu využíva), postup pri delta hedžingu, interpretácia ostatných parametrov citlivosti - čo vyjadrujú, aké majú znamienko a vysvetliť jeho finančnú interpretáciu
 5. Oceňovanie amerických derivátov - formulácia v tvare úlohy s voľnou hranicou a transformácia na úlohu lineárnej komplementarity pre call opciu.
 6. PSOR metóda - formulácia algoritmu, uvedenie predpokladov a dôkaz, že pri nich je limita generovanej postupnosti (konvergenciu môžete predpokladať) riešením zadanej úlohy.
 7. Odvodenie PDR pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom modeli krátkodobej úrokovej miery.
 8. Stochastická diferenciálna rovnica vo Vašíčkovom a Cox-Ingersoll-Rossovom model úrokových mier (s interpretáciou, čo nám to hovorí o procese). Transformácia PDR pre cenu dlhopisu na riešenie systému ODR pri vhodne zvolenej trhovej cene rizika.

Ak študent skúšku úspešne absolvoval, ale rozmýšľa nad opravným termínom, v AIS-e je možné zadať možnosť "môže sa prihlásiť na termín aj napriek udelenému hodnoteniu". Nevzniká tým nijaká povinnosť, ak sa nakoniec na opravný termín neprihlási, známka mu zostane, ale má možnosť prihlásenia na opravný termín. Defaultne to po spravení skúšky možné nie je, treba mi dať vedieť, že mám túto možnosť označiť. V prípade takéhoto opravného termínu sa opakuje celá skúška - písomná aj ústna.

4 Vzorová druhá časť skúšky (open book, 1 deň, riešenia sa odovzdajú mailom)

1. **10 bodov.** Odvodenie PDR pre cenu dlhopisu v jednofaktorovom modeli krátkodobej úrokovej miery.
2. **10 bodov.** Uvažujme binárnu opciu, ktorá vyplatí 1 USD, ak cena akcie v čase expirácie prekročí 100 USD. Predpokladajme, že dnešná cena akcie je veľmi malá. Intuitívne, vyššia volatilita je pre nás v tejto situácii výhodnejšia, lebo inak (len pomocou driftu) sa do priaznivého pásma ceny akcie zrejme nedostaneme. Sformulujte túto myšlienku ako tvrdenie o vege tejto opcie a dokážte ho.
3. **10 bodov.** Cenu akcie modelujeme geometrickým Brownovým pohybom. Vypočítajte kovarianciu medzi hodnotami ceny akcie v časoch s a t . Bez dôkazu môžete použiť, že $E[e^{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$.