Prvá časť skúšky – 90 minút – 30 bodov
Každý príklad má hodnotu 10 bodov.

1. Uvažujme Vašíčkov model pre okamžitú úrokovú mieru. Namiesto konštantnej trhovej ceny rizika ju však zoberieme rovnú lineárnej funkcii premennej r, teda v tvare $A + B\,r$. Odvoďte cenu dlhopisu v takomto modeli.

2. Uvažujme Black-Scholesov model a binárnu opciu, ktorá vyplatí 1 USD, ak cena akcie v čase exspirácie prekročí 100 USD. Odvoďte hodnotu (v závislosti od parametrov) K takú, že pre cenu akcie menšiu ako K je vega opcie kladná a pre cenu väčšiu ako K je vega záporná. Dokážte, že znamienka vegy naľavo a napravo od tejto hodnoty sú naozaj také, ako požadujeme.

   <u>*Finančná motivácia k príkladu:*</u>
   Predpokladajme, že dnešná cena akcie je veľmi malá. Intuitívne, vyššia volatilita je pre nás v tejto situácii výhodnejšia, lebo inak (len pomocou driftu) sa do priaznivého pásma ceny akcie zrejme nedostaneme. Očakávame teda, že pre malú cenu akcie bude vyššia volatilita viesť k vyššej cene opcie. Naopak, pri vysokej cene akcie nám malá volatilita vyhovuje, lebo to znamená, že z veľkou pravdepodobnosťou zostaneme v rozsahu cien, ktoré prinášajú kladný payoff.

3. Uvažujme Black-Scholesov model. Cena akcie sa riadi geometrickým Browvnovým pohybom $dS = 0{,}15\,S\,dt + 0{,}4\,S\,dw$. Na trhu existuje derivát, ktorého cena sa v každom čase rovná prevrátenej hodnote aktuálnej ceny akcie, teda $1/S$. Odvoďte, čomu sa musí rovnať úroková miera, aby na trhu nebola arbitráž.