

*I. Deriváty, call a put opcie,  
ohraničenia na ceny opcií, kombinované stratégie*

Beáta Stehlíková  
Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

# Čo sú finančné deriváty

- Slovo DERIVATIVE v slovníku:

*noun*

1 something which is based on another source:

*the aircraft is a derivative of the Falcon 20G*

- a word derived from another or from a root in the same or another language:

*'fly-tip' is a derivative of the phrase 'on the fly'*

- a substance that is derived chemically from a specified compound:

*crack is a highly addictive cocaine derivative*

2 (often **derivatives**) *Finance* an arrangement or product (such as a future, option, or warrant) whose value derives from and is dependent on the value of an underlying asset, such as a commodity, currency, or security:

[*as modifier*]:

*the derivatives market*

3 *Mathematics* an expression representing the rate of change of a function with respect to an independent variable.

<http://oxforddictionaries.com/definition/derivative>

# Deriváty

- Aristoteles píše o Tálesovi z Milétu (Politika, kniha I, kapitola XI):

*... ešte v zime dal peniaze, čo mal, ako závdavok a prenajal si všetky olivové lisy v Miléte a na ostrove Chios za nepatrný obnos, lebo nikto neprihadzoval. Keď potom prišiel pravý čas a naraz a súčasne sa mnohí záujemcovia zháňali po olivových lisoch, prenajímal ich tak draho, ako chcel.*

- Poukazuje na dôsledky monopolu, ale vidíme tu aj charakteristiky derivátov:
  - Právo použiť olivové lisy - jeho hodnota závisí od úrody v danom roku
  - Niektoré lisy mohli zostať nevyužité; Táles mal právo, ale nie povinnosť použiť lisy

# Deriváty

- Právo, ale súčasne aj povinnosť zrealizovať dohodnutý obchod - niekoľko historických príkladov:
  - Anglicko, Francúzsko, 12. stor. - dohoda o budúcom obchode založená na vzorke tovaru, „*lettre de faire*“
  - Japonsko, 17. stor. - štandardizované obchody s ryžou
  - Chicago, 19. stor. - obilie, založenie *Chicago Board of Trade* (1848)
  - 1898 - *Chicago Mercantile Trading*, maslo a vajcia, neskôr aj iné poľnohospodárske komodity
  - 1978 - *International Monetary Market* ako súčasť *Chicago Mercantile Trading*, cudzie meny, neskôr aj (napr.) deriváty S&P 500

# Akcie

- Budeme sa zaoberať predovšetkým derivátmi akcií
- Príklad: vývoj ceny akcie DIS (*The Walt Disney Company*)



<http://finance.yahoo.com>

# Akcie

- Vývoj ceny sa skladá z trendu a náhodných fluktuácií
- Príklad trendu: GM počas pol roka



<http://finance.google.com>

# Akcie

- Príklad fluktuácií: GM počas jedého dňa



<http://finance.google.com>

*Cena = trend + fluktuácie* → na matematické modelovanie potrebujeme stochastické procesy

# Opcie na akcie - zopakovanie definícií

---

- Európska call opcia je právo - ale nie povinnosť - kúpiť akciu za dohodnutú cenu  $E$  (*exspiračná cena, strike price, exercise price*) v dohodnutom čase  $T$  (*expiration time*)
- Európska put opcia je právo - ale nie povinnosť - predat' akciu za dohodnutú cenu  $E$  (*exspiračná cena, strike price, exercise price*) v dohodnutom čase  $T$  (*expiration time*)
- Americká call/put opcia - právo kúpiť/predat' akciu nie iba v čase exspirácie  $T$ , ale hocikedy do času exspirácie



# Opcie na akcie - ukážka dát

- Ukážka reálnych dát: put opcie na akcie Disney

Put Options		Expire at close Saturday, October 18, 2014					
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
50.00	DIS141018P00050000	0.03	0.00	0.01	0.04	34	396
55.00	DIS141018P00055000	0.05	0.00	0.02	0.05	32	172
60.00	DIS141018P00060000	0.09	0.00	0.04	0.08	10	416
65.00	DIS141018P00065000	0.15	0.00	0.07	0.14	25	815
67.50	DIS141018P00067500	0.15	0.00	0.08	0.14	5	130
70.00	DIS141018P00070000	0.17	↓0.03	0.12	0.17	30	1,062
72.50	DIS141018P00072500	0.23	↓0.03	0.17	0.21	2	734

<http://finance.yahoo.com>

# Opcie na akcie - vnútorná a časová hodnota

---

- Cena opcie sa skladá z dvoch častí:
  - vnútorná hodnota (*intrinsic value*) - cena opcie, ak by bola uplatnená teraz
  - časová hodnota (*time value*) - zostávajúca časť ceny opcie
    - vlastník opcie zaplatil túto hodnotu, očakáva, že opcia mu v budúcnosti prinesie zisk
    - riziková prémie pre vypisovateľa opcie

# Vnútoraná a časová hodnota: príklad

- Ceny putov zo str.9 - použijeme poslednú zrealizovanú cenu
- Cena akcie: 87.40 USD

**The Walt Disney Company (DIS)** - NYSE ★ Follow

**87.40** ↑ 0.55 (0.63%) 9:53AM EDT - Nasdaq Real Time Price

---

Prev Close:	86.85	Day's Range:	87.05 - 87.49
Open:	87.07	52wk Range:	60.41 - 87.63
Bid:	87.33 x 200	Volume:	482,854
Ask:	87.35 x 200	Avg Vol (3m):	6,031,720

- Zoberme put opciu s exspiračnou cenou 70 USD, ktorú stojí 0.17 USD:
  - vnútoraná hodnota: 0
  - časová hodnota: 0.17

# Vnútorná a časová hodnota: príklad

- Otázky:
  - Prečo majú opcie zo str. 9 nulovú vnútornú hodnotu?
  - Aké put opcie by mali kladnú vnútornú hodnotu?
  - Ako je to pre call opcie? Použite tieto dáta:

**Toyota Motor Corporation (TM)** - NYQ ★ Follow  
**119.43** ↑ 2.08 (1.77%) Sep 18, 4:03PM EDT

---

**Options**

View By Expiration: Sep 14 | **Oct 14** | Jan 15 | Apr 15 | Jan 16 | Jan 17

**Call Options**

Strike	Symbol	Last	Chg	
<b>110.00</b>	TM141018C00110000	<b>9.45</b>	↑ 1.79	
<b>115.00</b>	TM141018C00115000	<b>4.45</b>	↑ 1.40	
<b>120.00</b>	TM141018C00120000	<b>1.20</b>	↑ 0.44	
<b>125.00</b>	TM141018C00125000	<b>0.20</b>	↑ 0.03	
<b>130.00</b>	TM141018C00130000	<b>0.05</b>	0.00	

# Príklad

- Predáme akciu DIS za aktuálnu *bid cenu* (cena, ktorú je kupujúci ochotný zaplatiť): 87.33 USD.

**The Walt Disney Company (DIS)** - NYSE ★ Follow

**87.40** ↑ 0.55 (0.63%) 9:53AM EDT - Nasdaq Real Time Price

---

Prev Close:	86.85	Day's Range:	87.05 - 87.49
Open:	87.07	52wk Range:	60.41 - 87.63
Bid:	87.33 x 200	Volume:	482,854
Ask:	87.35 x 200	Avg Vol (3m):	6,031,720

<http://finance.yahoo.com>

# Príklad

- Ďalej, predáme put opciu s expiračnou cenou 60 USD a expiráciou v októbri za - nájdeme *bid cenu* - 0.04 USD

Put Options		Expire at close Saturday, October 18, 2014					
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
50.00	DIS141018P00050000	0.03	0.00	0.01	0.04	34	396
55.00	DIS141018P00055000	0.05	0.00	0.02	0.05	32	172
60.00	DIS141018P00060000	0.09	0.00	0.04	0.08	10	416
65.00	DIS141018P00065000	0.15	0.00	0.07	0.14	25	815
67.50	DIS141018P00067500	0.15	0.00	0.08	0.14	5	130
70.00	DIS141018P00070000	0.17	↓0.03	0.12	0.17	30	1,062
72.50	DIS141018P00072500	0.23	↓0.03	0.17	0.21	2	734

<http://finance.yahoo.com>

# Príklad

- Koľko by ste boli ochotní zaplatiť za call opciu s rovnakou expiračnou cenou?
- Pripomeňme si vývoj ceny DIS, dáta sú z 11.8.2014:



<http://finance.yahoo.com>

# Príklad

- Russel Sage, New York, 19. storočie
  - kúpi akciu a put opciu, predal call s rovnakou expiračnou cenou a rovnakým časom expirácie
  - takto obišiel ohraničenia na úroky dané zákonmi o úžere
- PRÍKLAD - POKRAČOVANIE:
  - Ukážeme, že táto stratégia je v skutočnosti pôžička (*synthetised loan*)
  - S akou úrokovou mierou ste súhlasili pri akceptovaní zvolenej ceny call opcie?



# Put-call parita

- Uvažujme portfólio:
  - vypíšeme 1 call opciu s exspiračnou cenou  $E$
  - kúpime 1 put opciu s rovnakou exspiračnou cenou a rovnakým časom expirácie
  - kúpime 1 akciu
- Aká bude hodnota portfólia v čase expirácie opcií?

$$\textit{portfólio} = - 1 \textit{ call} + 1 \textit{ put} + 1 \textit{ akcia}$$

$\Rightarrow$

$$\textit{payoff} = - [\textit{payoff callu}] + [\textit{payoff putu}] + [\textit{cena akcie}]$$

# Put-call parita

- Teda, v závislosti od ceny akcie  $S$  v čase exspirácie:
  - ak  $S \leq E$ :

$$payoff = -[0] + [E - S] + [S] = E$$

- ak  $S \geq E$ :

$$payoff = -[S - E] + [0] + [S] = E$$

Takže, bez ohľadu na vývoj ceny akcie, hodnota portfólia bude  $E$

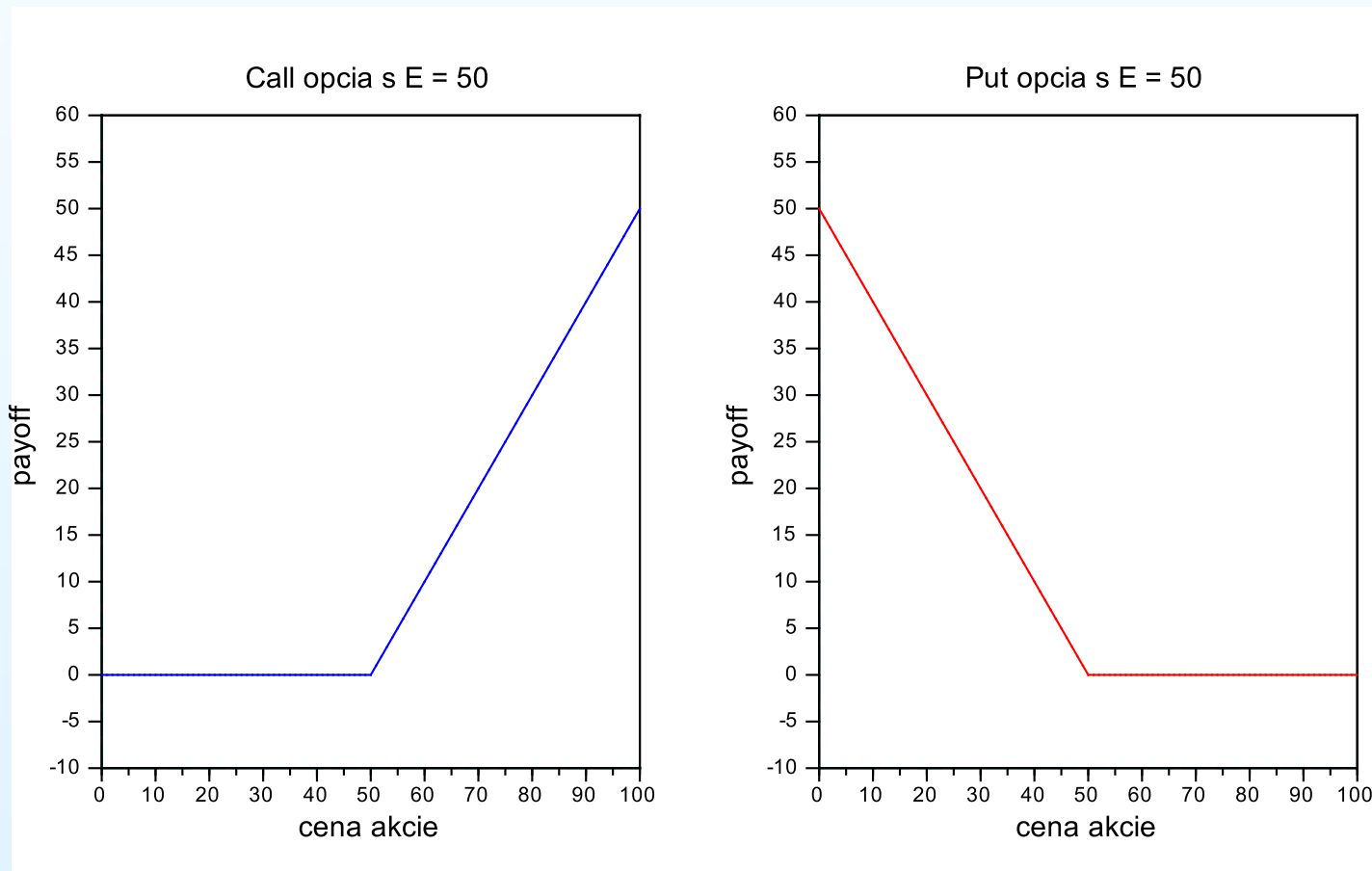
- Hodnota portfólia dnes preto musí byť

$$-c(S, E, \tau) + p(S, E, \tau) + S = Ee^{-r\tau}$$

- dostali sme vzťah medzi cenami call a put opcií, známy ako put-call parita

# Payoff diagram

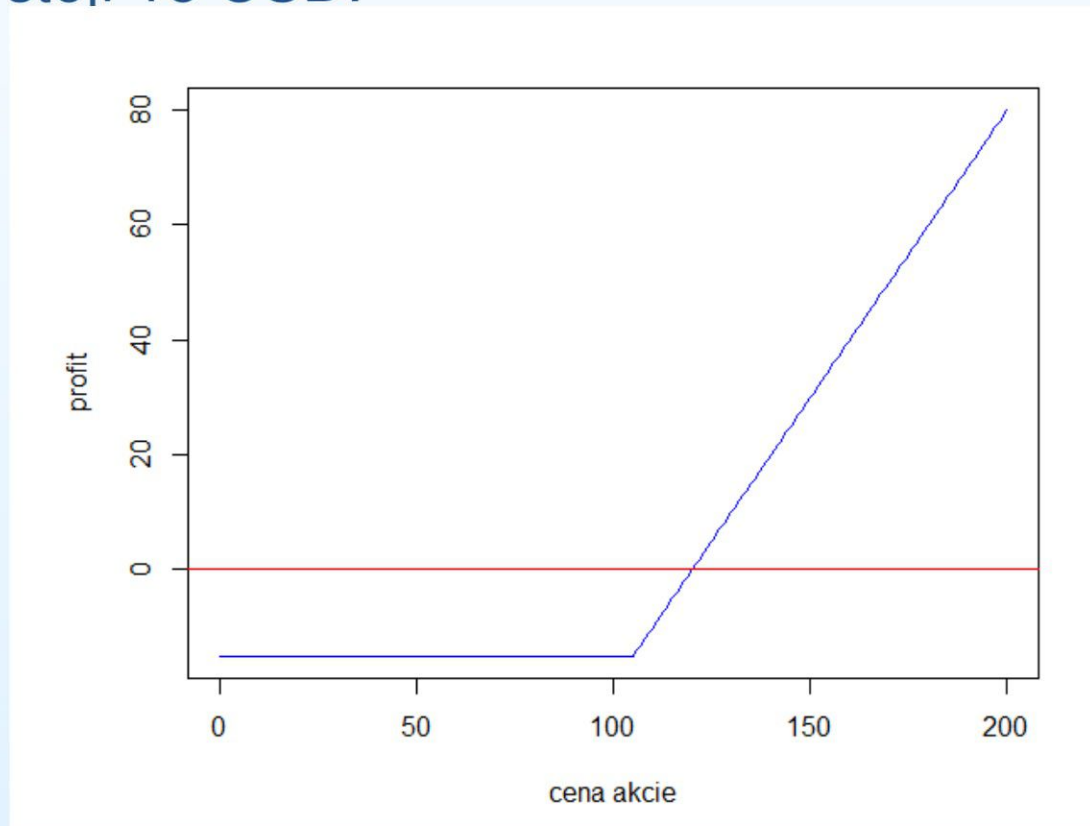
- Payoff diagram opcie - hodnota opcie v čase exspirácie ako funkcia ceny akcie v tomto čase
- Call opcia:  $\max(0, S - E)$  , put opcia:  $\max(E - S, 0)$



# Profit diagram

Profit diagram opcie - payoff zníženú o hodnotu začiatocnej investície; pre  $r = 0$  je *profit = payoff - (začiatocná investícia)*

PRÍKLAD: Payoff diagram call opcie s expiračnou cenou 105 USD, ktorá stojí 15 USD:



# Kombinované stratégie

## PRÍKLAD:

- Uvažujme akcie MCD (Mac Donald's Corp.)



<http://finance.yahoo.com>

a predpokladajme (pre účely tohto cvičenia), že očakávame pokles ceny

# Kombinované stratégie

- Cena akcie je 93.72 USD a niektoré z dostupných opcií sú:

Put Options				Expire at close Friday, September 5, 2014			
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
85.00	MCD140920P00085000	0.22	0.00	0.17	0.22	56	1,471
86.00	MCD140905P00086000	0.16	0.00	0.11	0.18	2	5
87.50	MCD140920P00087500	0.33	↓0.03	0.31	0.33	17	1,575
88.00	MCD140926P00088000	0.59	0.00	0.41	0.49	2	2
89.00	MCD140905P00089000	0.36	0.00	0.28	0.34	26	965
89.00	MCD140912P00089000	0.45	0.00	0.37	0.44	13	83
89.00	MCD140926P00089000	0.66	0.00	0.56	0.63	4	4
90.00	MCD140920P00090000	0.65	↓0.07	0.62	0.66	21	6,135

<http://finance.yahoo.com>

- Očakávame pokles ceny ⇒ kúpime put opciu, napr. put opciu s expiračnou cenou 90 USD
- Ak ale nepredpokladáme veľmi výrazný pokles ⇒ vypíšeme put opciu s nižšou expiračnou cenou, napr. 85 USD
- Predpokladáme, že vypísaná opcia nebude uplatnená, ale jej vypísaním si znížime začiatočnú investíciu

# Kombinované stratégie

---

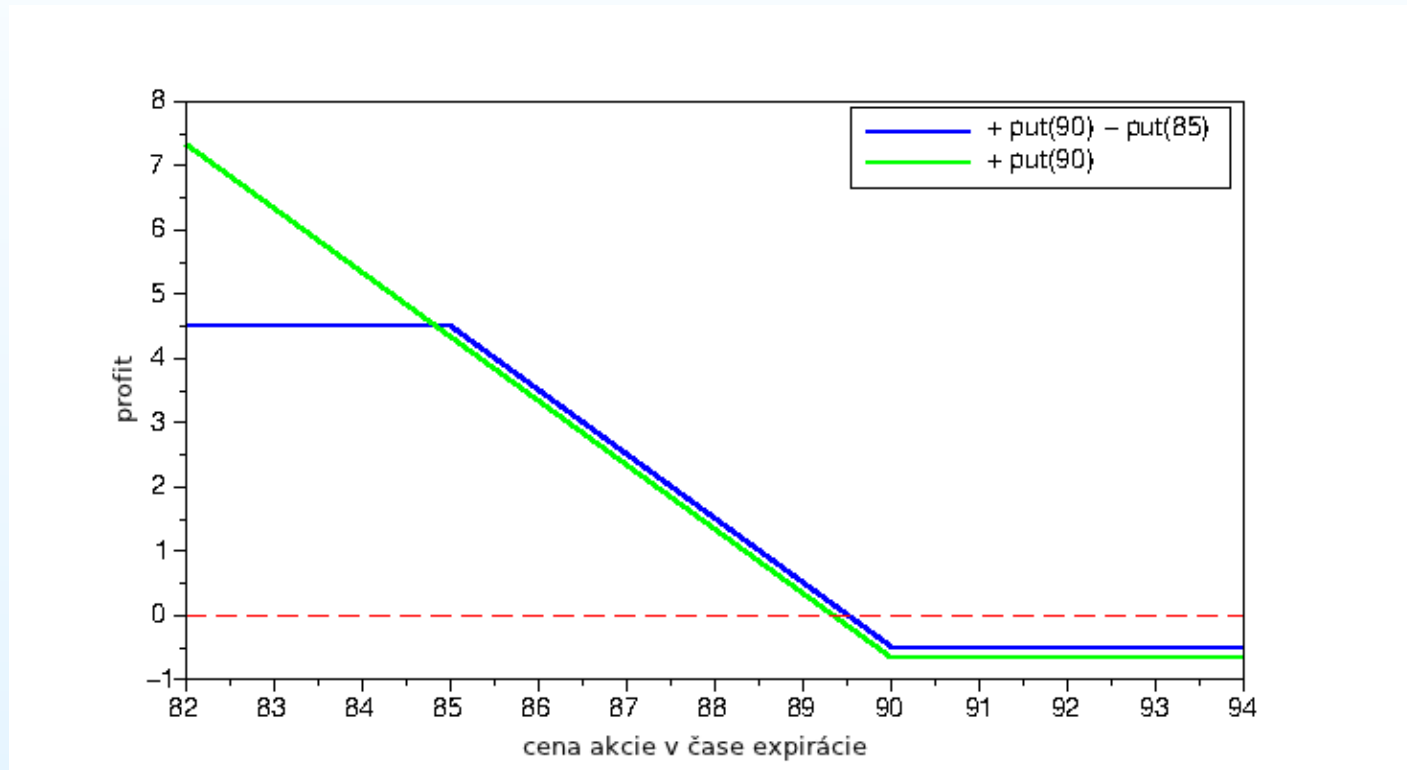
- Naša stratégia teda je:

*kúpime put s  $E = 90$  a predáme put s  $E = 85$*

- Pripomeňme si bid and ask ceny:
  - bid cena (nižšia) - ponuka na kúpu → opciu vieme predat' za *bid*
  - ask cena (vyššia) - ponuka na predaj → opciu vieme kúpiť za *ask*
- Teda naša začiatočná investícia je **0.49**, lebo:
  - kúpime put s  $E = 90$  za **0.66**
  - predáme put s  $E = 85$  za **0.17**

# Kombinované stratégie

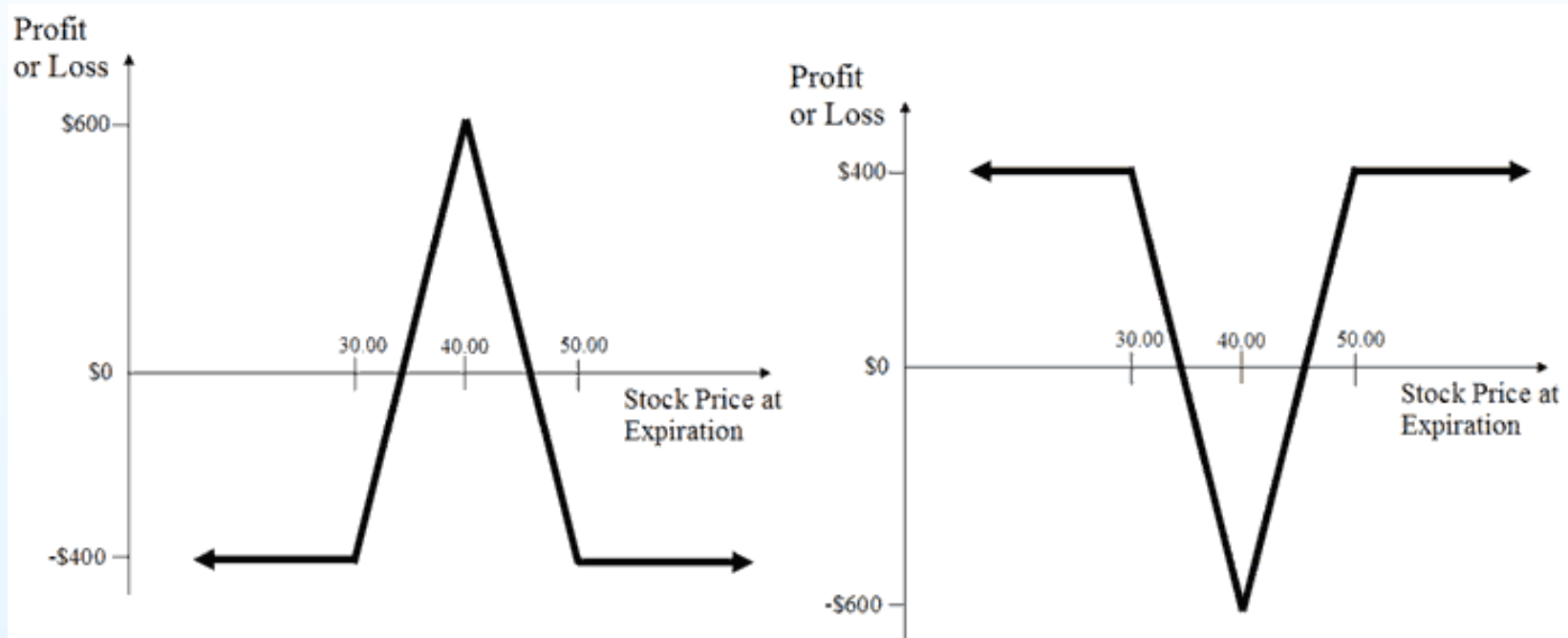
- Profit diagram + porovnanie s možnosťou, ak by sme iba kúpili put s  $E = 90$ :





# Kombinované stratégie

- CVIČENIE: Pri akom očakávaní o cene akcie by sme zrealizovali tieto stratégie?



<http://www.theoptionguide.com>

# Kombinované stratégie

- Kritériá na výber stratégie:

## Option Strategy Finder

A large number of options trading strategies are available to the options trader. Use the search facility below to quickly locate the best options strategies based upon your view of the underlying and desired risk/reward characteristics.

**Outlook on Underlying:** Bullish  **Profit Potential:**  **Loss Potential:**  **Credit/Debit:**  **No. Legs:**

Click on the profit graph for a detailed explanation of each individual options strategy.

Limited  
Unlimited

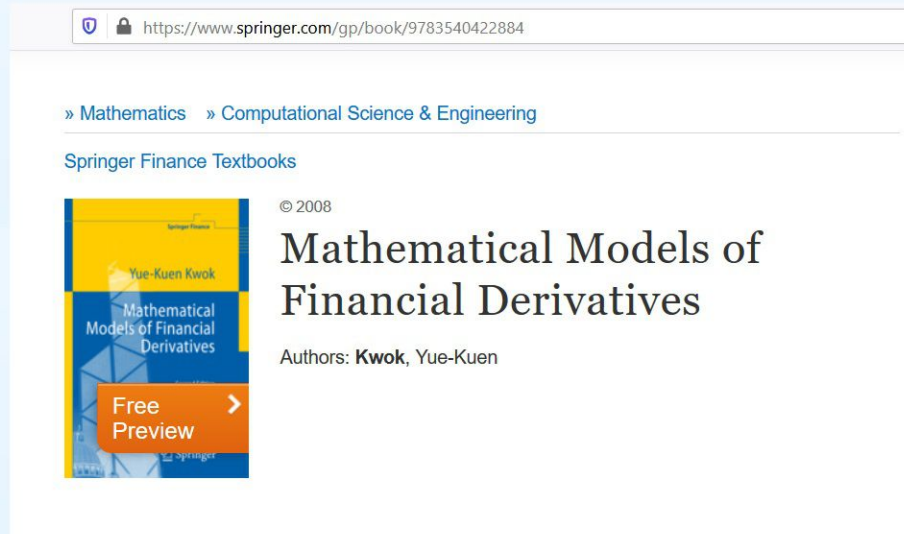
The image displays four profit/loss graphs for different option strategies. Each graph plots Profit or Loss on the y-axis against the underlying asset price at expiration on the x-axis. The strategies shown are: 1. Bull Call Spread: Profit is flat at a negative value until the stock price reaches a strike price, then rises linearly until it reaches a second strike price, after which it remains flat at a positive value. 2. Bull Put Spread: Profit is flat at a positive value until the stock price reaches a strike price, then falls linearly until it reaches a second strike price, after which it remains flat at a negative value. 3. Index Long Call: Profit is flat at a negative value until the index level reaches a strike price, then rises linearly. 4. Call Backspread: Profit is flat at a positive value until the stock price reaches a strike price, then falls linearly to a negative value at a second strike price, after which it rises linearly.

**Bull Call Spread**      **Bull Put Spread**      **Buying Index Calls**      **Call Backspread**

<http://www.theoptionsguide.com>

# Kombinované stratégie

- Kombinované stratégie - prehľad:



https://www.springer.com/gp/book/9783540422884

» Mathematics » Computational Science & Engineering

Springer Finance Textbooks

© 2008

**Mathematical Models of Financial Derivatives**

Authors: **Kwok**, Yue-Kuen

Free Preview >

[Download Preface 1 PDF \(77.5 KB\)](#)

[Download Sample pages 1 PDF \(500.3 KB\)](#)

[Download Table of contents PDF \(56.1 KB\)](#)

## 1.1.1 Trading Strategies Involving Options

We have seen in the above simple hedging example how the combined use of an option and the underlying asset can monitor risk exposure. Now, we would like to

### 6 1 Introduction to Derivative Instruments

examine the various strategies of portfolio management using options and the underlying asset as the basic financial instruments. Here, we confine our discussion of portfolio strategies to the use of European vanilla call and put options. We also

# Chooser option

---

- *Chooser* opcia:
  - payoff v čase  $T$  bude payoff call alebo put opcie s expiračnou cenou  $E$
  - o tom, či pôjde o call alebo put opciu, rozhodne držiteľ opcie v čase  $T_c < T$
  - opcia sa predáva v čase  $t < T_c$
- Kedy sa môže zísť:

*One might be wise to select a chooser option on a biotech company awaiting the FDA's reaction to its latest wonder drug or any company facing litigation. Unfortunately, chooser options are somewhat rare and tend to be issued on more stable items.*

<http://www.investopedia.com/terms/c/chooseroption.asp>

# Chooser option

- Označenie:  
 $call(E, T; t)$  - call opcia s exspiračnou cenou  $E$  a splatnosťou v čase  $T$ , pričom aktuálny čas je  $t$
- Hodnota *chooser* opcie v čase  $T_c$  je

$$chooser(T_c) = \max(call(E, T; T_c), put(E, T; T_c))$$

- Ak akcia nevypláca dividendy, z put-call parity dostaneme:

$$chooser(T_c) = call(E, T; T_c) + \max(0, Ee^{-r(T-T_c)} - S_{T_c})$$

pričom vidíme, že druhý člen je payoff put opcie

# Chooser option

- *Chooser* opcia je teda ekvivalentná s kombinovanou stratégiou:
  - 1 call opcia s exspiračnou cenou  $E$  a splatnosťou v čase  $T$
  - 1 put opcia s exspiračnou cenou  $Ee^{-r(T-T_c)}$  a splatnosťou v čase  $T_c$
- Ak vieme oceniť call a put opcie (napríklad pomocou Black-Scholesovho modelu), tak vieme oceniť aj *chooser* opcie

CVIČENIE NA DÚ: S akou kombináciou call a put opcií je *chooser* opcia ekvivalentná, ak akcia vypláca spojitú dividendu?

# Ohraničenia na ceny opcií

- Ukážeme niekoľko nerovností pre ceny, ktoré musia platiť - inak by bola na trhu arbitráž
- Všetky uvažované opcie majú rovnaký čas expirácie
- Bezrizikovú úrokovú mieru označíme  $r$ .
- Označenie:
  - $c(S, E, \tau)$  je trhovú cenu call opcie s expiračnou cenou  $E$ , ak dnešná cena akcie je  $S$  a čas zostávajúci do expirácie je  $\tau$
  - $p(S, E, \tau)$  je trhovú cenu put opcie s expiračnou cenou  $E$ , ak dnešná cena akcie je  $S$  a čas zostávajúci do expirácie je  $\tau$

# Ohraničenia na ceny opcií

---

- Postup:
  - Uvažujme dve portfóliá - také, že v čase exspirácie platí
$$(\text{hodnota portfólia I.}) \leq (\text{hodnota portfólia II.})$$
  - Aby nevznikla arbitráž, aj dnes musí platiť
$$(\text{hodnota portfólia I.}) \leq (\text{hodnota portfólia II.})$$
    - portfóliá sú skonštruované tak, aby práve toto bola nerovnosť, ktorú chceme dokázať



# Ohraničenia na ceny opcií - príklady

PRÍKLAD 1: Je zrejmé, že musí byť

$$c(S, E, \tau) \geq 0, p(S, E, \tau) \geq 0$$

PRÍKLAD 2: Dokážte, že

$$E_1 \geq E_2 \Rightarrow c(S, E_1, \tau) \leq c(S, E_2, \tau)$$

RIEŠENIE: Nech  $E_1 \geq E_2$  Uvažujme nasledovné portfóliá:

portfólio I.: opcia s exspiračnou cenou  $E_1$

portfólio II.: opcia s exspiračnou cenou  $E_2$

Porovnáme ich hodnoty v čase expirácie, v závislosti od ceny akcie  $S$  v tomto čase

# Ohraničenia na ceny opcií - príklady

	$0 \leq S \leq E_2$	$E_2 \leq S \leq E_1$	$E_1 \leq S$
portfólio I.	0	0	$S - E_1$
portfólio II.	0	$S - E_2$	$S - E_2$
porovnanie	$0 = 0$	$0 \leq S - E_2$	$S - E_1 \leq S - E_2$

V čase expirácie:

(hodnota portfólia I.)  $\leq$  (hodnota portfólia II.)

$\Rightarrow$  aj dnes:

(hodnota portfólia I.)  $\leq$  (hodnota portfólia II.),

teda

$$c(S, E_1, \tau) \leq c(S, E_2, \tau), \text{ QED}$$

# Ohraničenia na ceny opcií - príklady

## PRÍKAD 3:

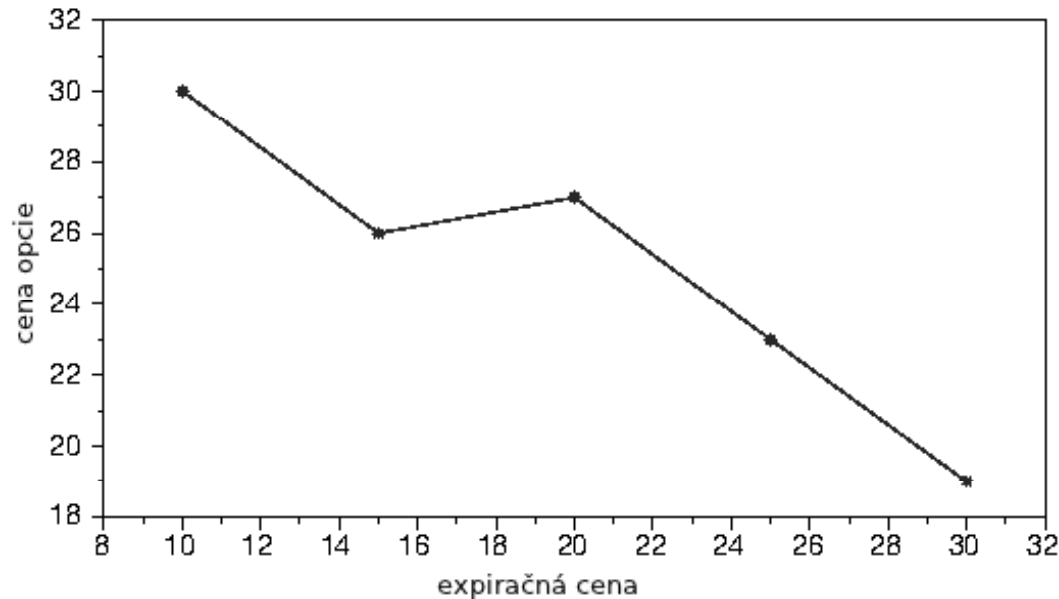
Predpokladjme, že úroková miera je nulová a máme nasledujúce ceny call opcií:

expiračná cena	cena opcie
10	30
15	26
20	27
25	23
30	19

Nájdite arbitráž.

RIEŠENIE: Nakreslíme závislosť ceny call opcie od expiračnej ceny - nerastúca závislosť z predchádzajúceho príkladu tu nie je splnená

# Ohraničenia na ceny opcií - príklady

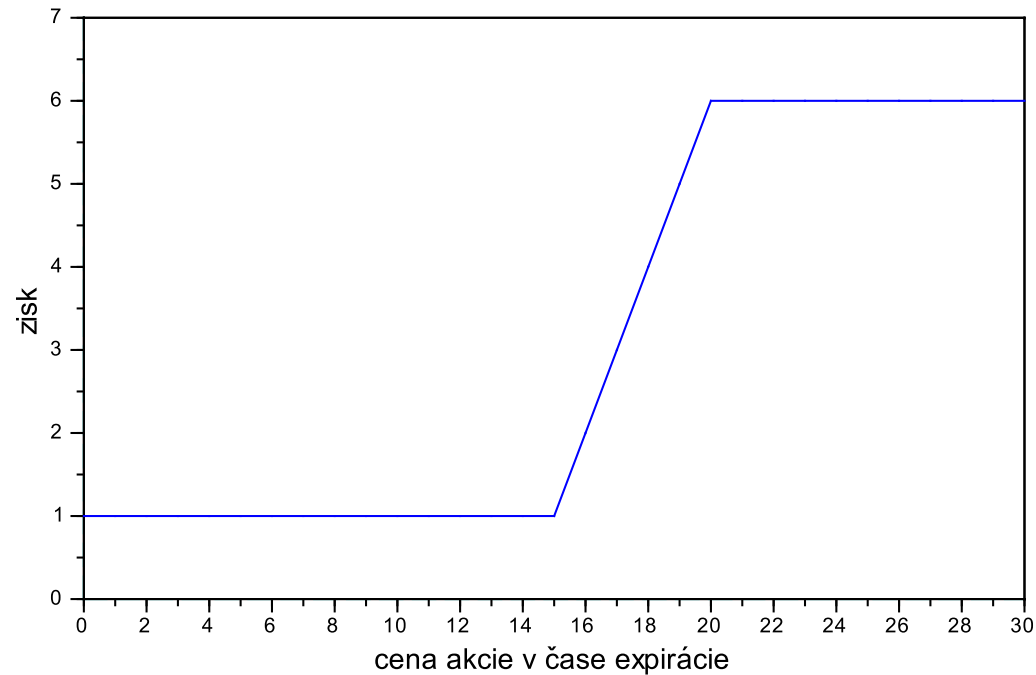


Malo by platiť  $c(S, 15, \tau) \geq c(S, 20, \tau)$ , ale tu máme  $c(S, 15, \tau) < c(S, 20, \tau)$ . Preto:

- *kúpime opciu, ktorá stojí menej, ako by mala, v tomto prípade opciu s expiračnou cenou  $E = 15$ ,*
- *predáme opciu, ktorá stojí viac, ako by mala, v tomto prípade opciu s expiračnou cenou  $E = 20$ .*

# Ohraničenia na ceny opcií - príklady

- Profit diagram stratégie:



⇒ je to naozaj arbitráž

# Ohraničenia na ceny opcií - príklady

- PRÍKLAD 4: Rovnakým postupom ako v pr. 2 dokážeme, že cena call opcie musí byť konvexnou funkciou expiračnej ceny

