

## *IV. Spread opcie, Margrabeho formula.*

Beáta Stehlíková

Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

# Spread opcie: Margrabeho formula

- Pripomeňme si: spread opcie

$$V(S_1, S_2, T) = \max((S_1 - S_2) - E, 0)$$

- O akciách predpokladajme, že nevyplácajú dividendy a platí:

$$dS_1 = \mu_1 S_1 dt + \sigma_1 S_1 dw_1$$

$$dS_2 = \mu_2 S_2 dt + \sigma_2 S_2 dw_2$$

pričom  $\mathbb{E}[dw_1 dw_2] = \rho dt$

- Pre prípad  $E = 0$  existuje explicitné riešenie pre cenu opcie - tzv. Margrabeho formula
- Odvodíme PDR pre cenu opcie a nájdeme jej riešenie

# Spread opcie: Margrabeho formula

- Rovnaký postup ako v prípade Black-Scholesovho modelu
- Portfólio:
  - jedna opcia  $V$
  - $-\Delta_1$  akcií  $S_1$
  - $-\Delta_2$  akcií  $S_2$

Hodnota portfólia:  $P = V - \Delta_1 S_1 - \Delta_2 S_2$

- Zmena hodnoty portfólia:  $P = dV - \Delta_1 dS_1 - \Delta_2 dS_2$ , pričom
  - $dS_1, dS_2$  máme v prepokladoch
  - $dV$  určíme pomocou viacrozmernej Itóovej lemy (keďže  $V = V(S_1, S_2, t)$ )
- Eliminujeme náhodnosť (členy pri  $dw_1, dw_2$ ) - dosiahneme to voľbou  $\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S_1}, \Delta_2 = \frac{\partial V}{\partial S_2}$
- Bezrizikové portfólio musí mať výnos  $r$

# Spread opcie: Margrabeho formula

- Výsledná PDR:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} \\ + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} - rV = 0 \end{aligned}$$

s koncovou podmienkou

$$V(S_1, S_2, T) = \max(S_1 - S_2, 0)$$

- Transformácia:

$$V(S_1, S_2, t) = S_2 f(x, t), \quad x = \frac{S_1}{S_2}$$

# Spread opcie: Margrabeho formula

- PDR pre funkciu  $f(x, t)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

kde  $\tilde{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2$

- Koncová podmienka:  $f(x, T) = \max(x - 1, 0)$
- To je Black-Scholesova PDR pre call, pričom
  - premenná  $x$  zodpovedá cene akcie  $S$
  - expiračná cena  $E = 1$
  - úroková miera je nulová
- Riešenie teda je  $f(x, t) = xN(d_1) - N(d_2)$ , kde

$$d_1 = \frac{\log x + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\tau}{\tilde{\sigma}\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{\tau}$$

## Spread opcie: Margrabeho formula

- Riešenie v pôvodných premenných (teda cena opcie):

$$V(S_1, S_2, t) = S_1 N(d_1) - S_2 N(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_1}{S_2} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \tau}{\tilde{\sigma} \sqrt{\tau}}, d_2 = d_1 - \tilde{\sigma} \sqrt{\tau}$$

- tento vzorec je známy ako Margrabeho formula
- DÚ: Odvod'te týmto postupom cenu takejto opcie, ak akcie vyplácajú spojité dividendy s dividendovými mierami  $q_1, q_2$ .