Oceňovanie amerických opcií

Beáta Stehlíková
Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Európske a americké typy derivátov

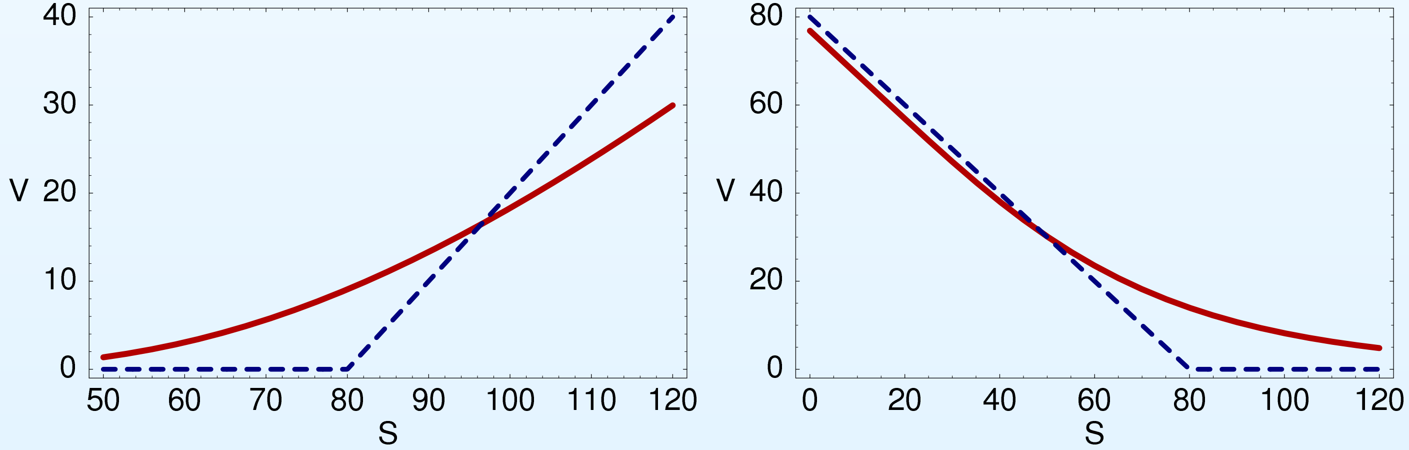
- Uvažujme put opciu s exspiračnou cenou 150 USD - teda právo predať akciu za 150 USD. Nech exspirácia opcie je o mesiac.
  - ak je opcia európskeho typu: toto právo môžeme využiť v čase exspirácie - teda o mesiac
  - ak je opcia amerického typu: toto právo môžeme využiť kedykoľvek odteraz do času exspirácie
- Ak táto opcia stojí 20 USD a dnešná cena akcie je 110 USD:
  - ak je opcia európskeho typu: zisk závisí od toho, ako sa bude cena akcie ďalej vyvíjať
  - ak je opcia amerického typu: kúpime opciu a hneď ju uplatníme $\rightarrow$ okamžitý bezrizikový zisk
- CVIČENIE: Vymyslite podobný príklad pre call.

Európske a americké typy derivátov

- Ohraničenie, ktoré musí byť splnené, aby nebola príležitosť na bezrizikový zisk (t.j. arbitráž):

cena amerického derivátu nesmie byť pod payoffom

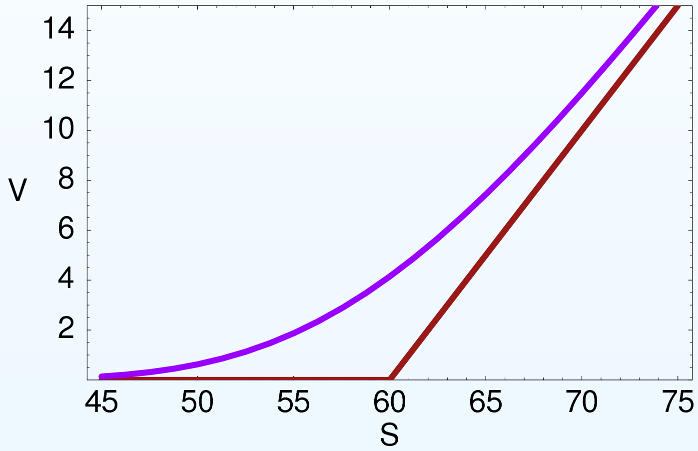
- Európske typy derivátov: call na akciu vyplácajúcu dividendy, put na akúkoľvek akciu



$\Rightarrow$ cena amerického derivátu sa tu teda nerovná cene európskeho

Európske a americké typy derivátov

- Európske typy derivátov - pokračovanie: call na akciu nevyplácajúcu dividendy



cena je stále nad payoffom $\Rightarrow$ v súlade s tým, čo už vieme z finančnej matematiky: cena amerického derivátu sa rovná cene európskeho

Európske a americké typy derivátov

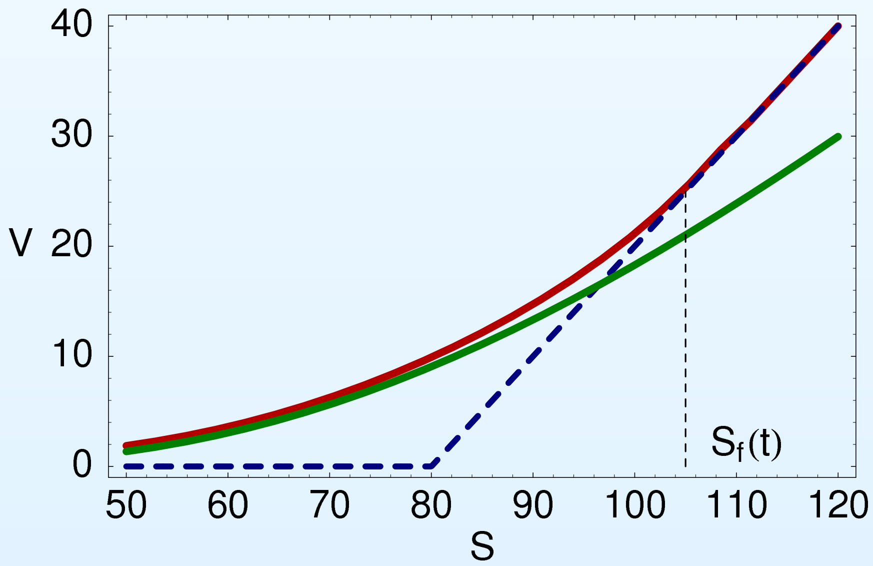
- Je to takto aj vo všeobecnosti - dokážeme:
  - Ak akcia nevypláca dividendy, tak cena call opcie je vždy nad payoffom.
  - Ak akcia vypláca dividendy, cena call opcie vždy pretne payoff.
  - Cena put opcie vždy pretne payoff.

  Základná myšlienka: budeme počítať limitu podielu $V(S,t)/(S-E)$, ak $S \to \infty$ (pre call), resp. $S \to 0^+$ (pre put)
- Preto:
  - Cena amerického callu na akciu bez dividend sa rovná cene európskeho callu
  - Cenu amerického callu na akciu s dividendami a cenu putu na hocijakú akciu treba počítať inak

Americké typy derivátov

- Nemôžeme zobrať: cena = max (euróska opcia, payoff) - graf musí byť **hladká funkcia**
- Prečo musí byť hladká - matematické odvodenie:

  Ševčovič, Stehlíková, Mikula: **Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov**, str. 155-156
- Ako bude riešenie vyzerať (hladké napojenie na payoff v bode $S_f(t)$):



Americké typy derivátov

- Priebeh riešenia (pre call):
  - ak $S < S_f(t)$: cena spĺňa Black-Scholesovu PDR, opciu držíme (neuplatňujeme)
  - ak $S > S_f(t)$: cena sa rovná payoffu, opciu uplatníme)
  - ak $S = S_f(t)$: cena má v tomto bode rovnakú hodnotu (kvôli spojitosti) aj deriváciu (kvôli hladkosti napojenia) ako payoff
- $S_f(t)$ - hranica predčasného uplatnenia, matematicky je to voľná hranica

Matematická formulácia úlohy

- Pre call opciu:
  - funkcia $V(S,t)$ je riešením Black-Scholesovej PDR

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

    na časovo závislej oblasti $0 < t < T, 0 < S < S_f(t)$.
  - Koncová podmienka:

$$V(S,T) = \max(S-E, 0).$$

  - Okrajové podmienky na hranici $S = 0$ a $S = S_f(t)$ pre $0 < t < T$:

$$V(0,t) = 0, \quad V(S_f(t),t) = S_f(t) - E, \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1$$

Matematická formulácia úlohy

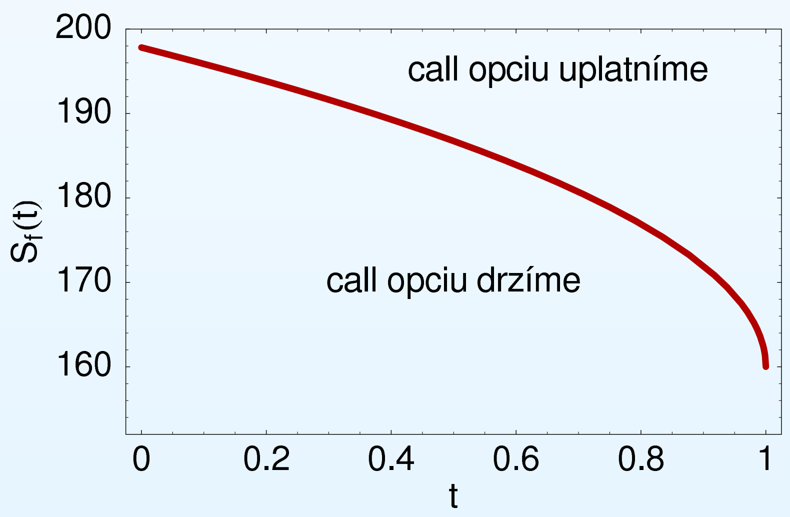
- Čo treba zmeniť pre put opciu:
  - časovo závislú oblasť na $0 < t < T$, $S > S_f(t)$
  - koncovú podmienku na $V(S,T) = \max(E - S, 0)$
  - okrajové podmienky na

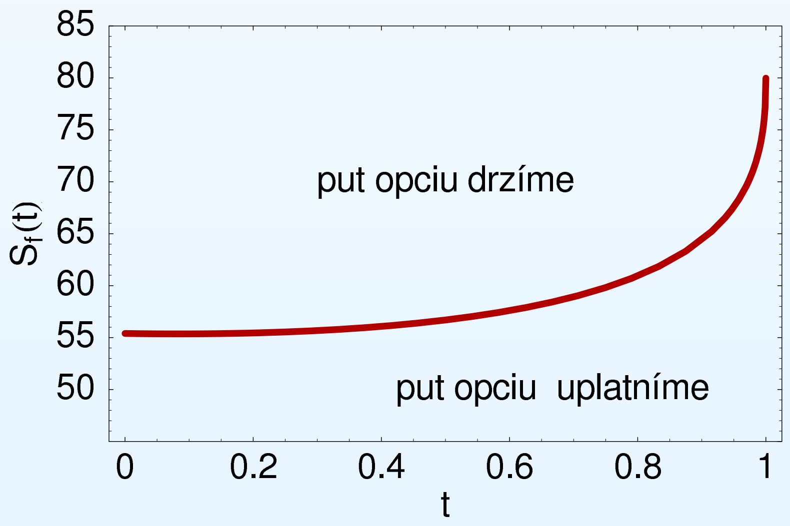
$$V(+\infty, t) = 0,$$

$$V(S_f(t), t) = E - S_f(t), \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = -1$$

Výstup

- Vyriešením úlohy dostaneme:
  - cenu opcie $V(S,t)$ v závislosti od ceny akcie a času
  - hranicu predčasného uplatnenia - t.j. či pre daný čas a cenu akcie opciu uplatniť, alebo nie





Analýza priebehu hranice $S_f(t)$

- Predmet výskumu vo finančnej matematike
- Ukážeme si jednu ohraničenie na $S_f(t)$ pre call opciu
- Budeme ho potrebovať pri odvodení numerickej schémy oceňovania amerických opcií

Ohraničenie pre $S_f(t)$

- Zoberieme Black-Scholesovu PDR pre $S < S_f$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- Spravíme limitu $S \to S_f$, pričom využijeme:
    - lemu, ktorú najprv dokážeme: $\frac{\partial V}{\partial t}(S_f(t), t) = 0$
    - konvexnosť V vzhľadom na S
    - okrajovú podmienku

  Dostaneme:

$$(r-q)S_f(t) - r(S_f(t) - E) \le 0 \Rightarrow S_f(t) \ge \frac{r}{q}E$$

- Takže:

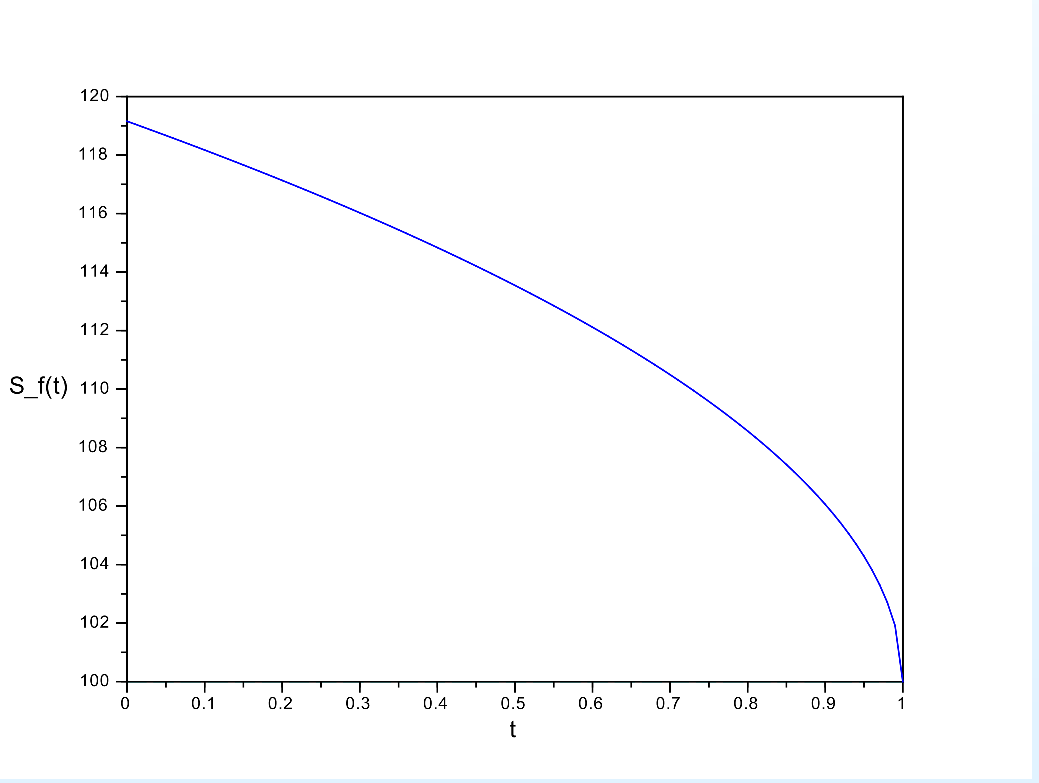
$$S_f(t) \ge E\max(1, r/q)$$

Ukážky výskumu vo fin. mat.

- J. N. Dewyne, S. D. Howison, J. Rupf, P. Wilmott (1993): **Some mathematical results in the pricing of American options.** Euro. Journal on Applied Mathematics 4, 381-398

Asymptotika pre call opciu, ak $r \leq q$ a $t \to T$:

$$S_f(t) \approx E(1 + 0.638\sigma\sqrt{T-t})$$



Ukážky výskumu vo fin. mat.

- D. Ševčovič (2001): **Analysis of the free boundary for the pricing of an American Call option.** Euro. Journal on Applied Mathematics 12, 25-37.

  Nelineárna integrálna rovnica pre $S_f(t)$ a jej numerické riešenie

- S. P. Zhu (2006): **A new analytical approximation formula for the optimal exercise boundary of American put options.** International Journal of Theoretical and Applied Finance 9, 1141-1177.

  Aproximácia $S_f(t)$ v analytickom tvare

Oceň. pomocou lin. komplementarity

- Označme $V(S,t)$ cenu americkej opcie a $\bar{V}(S)$ jej payoff
- Vieme, že musí platiť $V(S,t) \geq \bar{V}(S)$
- Ukážeme (pre prípad callu), že

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0$$

  - ak $S < S_f$: nastáva rovnosť
  - ak $S \geq S_f$: vtedy $V(S,t) = S - E$ (lebo $S_f \geq E$); dosadíme do ľavej strany a využijeme, že $S_f \geq Er/q$
- Súčasne vidíme, že nemôžu byť ostré obe nerovnosti súčasne

Oceň. pomocou lin. komplementarity

- Máme teda úlohu o lineárnej komplementarite:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leq 0$$

$$V(S,t) \geq \bar{V}(S)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV\right)\left(V(S,t) - \bar{V}(S)\right) = 0$$

pre $S \in (0,\infty), 0 < \tau < T$.

Oceň. pomocou lin. komplementarity

- Postupnosť transformácií z predch. prednášok: $V(S,t) \to Z(x,\tau) \to u(x,\tau)$
- Úloha pre $u(x,\tau)$ v prípade callu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(u(x,\tau) - g(x,\tau)\right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \geq 0, \quad u(x,\tau) - g(x,\tau) &\geq 0 \end{aligned}$$

  pre $x \in \mathbb{R}, 0 < \tau < T,$ kde
  - $g(x,\tau) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} \max(0, e^x - 1)$ je transformovaný payoff (α, β v prechádzajúcej prednáške)
  - $g(x,0)$ je začiatočná podmienka $u(x,0)$
- Pre put sa zmení: $g(x,\tau) = Ee^{\alpha x + \beta \tau} \max(0, 1 - e^x)$