Nelineárne modely oceňovania finančných derivátov: základné myšlienky vybraných modelov

Beáta Stehlíková
Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Modely

- Vybrané modely:
  - RAPM (risk adjusted pricing methodology) - transakčné náklady a riziko z nezabezpečeného portfólia
  - prítomnosť dominantného investora
  - modelovanie investorovych preferencií
- Cieľ tejto prednášky - ukázať:
  - aké finančné predpoklady sa dajú modelovať - príklady
  - aké matematické nástroje sa používajú pri analýze modelov
  - základné myšlienky na získanie určitej predstavy o takejto analýze, bez detailných výpočtov

RAPM model

M. Jandačka, D. Ševčovič: **On the risk adjusted pricing methodology based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile**, Journal of Applied Mathematics, 3, 2005, 235-258

- Transakčné náklady ako v Lelandovom modeli - potom máme the portfólio $P = V + \delta S$ a zmena jeho hodnoty je $\Delta P = \Delta V + \delta \Delta S - r_{TC} S \Delta t$, kde

$$r_{TC} = \frac{cS\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \frac{1}{\Delta t}$$

- Riziko z nezaisteného portfólia (riziko meriame varianciou):

$$r_{VP} = R \frac{Var[\Delta P / S]}{\Delta t},$$

kde R je hraničná hodnota vystavenia sa riziku

RAPM model

- Dá sa odvodiť (Itóova lema, výpočet disperzie):

$$r_{VP} = \frac{1}{2} R \sigma^4 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 \Delta t$$

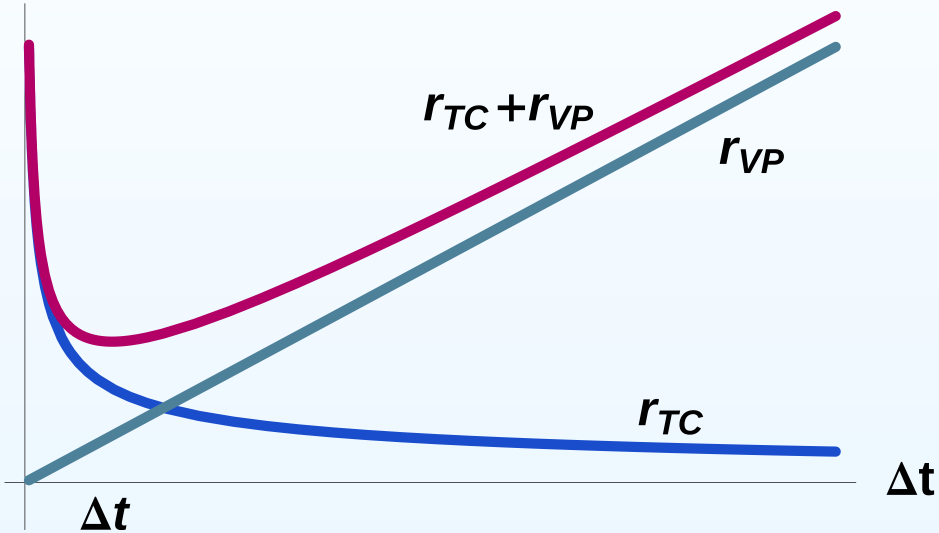
- Rizikovo neutrálny investor $\Rightarrow$ svojou voľbou Δt chce minimalizovať

$$r_R = r_{TC} + r_{VP} = \frac{cS\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right| \frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{2} R \sigma^4 S^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^2 \Delta t$$

$\Rightarrow$ dostaneme optimálnu dĺžku intervalu Δt

RAPM model

- Hľadanie optimálneho Δt_{opt}:



- Pri tejto optimálnej hodnote Δt_{opt} máme:

$$r_R(\Delta t_{opt}) = \frac{3}{2}\left(\frac{c^2 R}{2\pi}\right)^{1/3} \sigma^2 \left| S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right|^{4/3}$$

RAPM model

- Pri tejto optimálnej hodnote Δt_{opt} dostaneme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu derivátu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \left[1 + \mu \left(S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^{1/3} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0,$$

pričom:

$\mu = 3 \left(\frac{c^2 R}{2\pi} \right)^{1/3}$ je konštanta;

Γ^p pre $\Gamma = S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ a $p = 1/3$ sa počíta ako $\Gamma^p = |\Gamma|^{p-1} \Gamma$

RAPM model

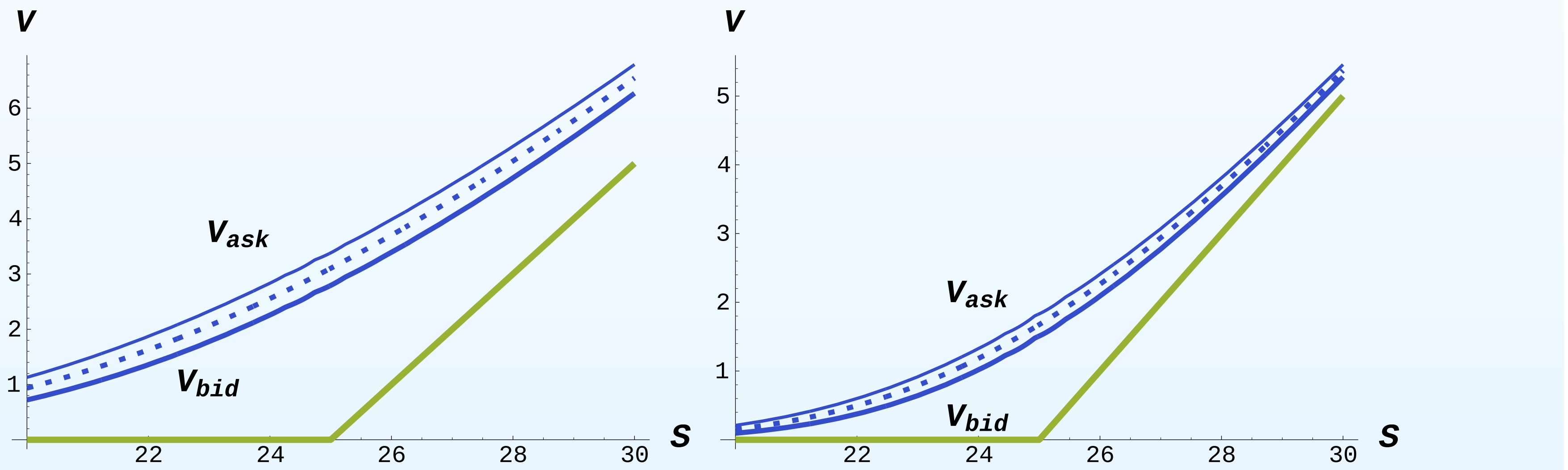
- Riešenie PDR pre cenu derivátu:
  - samotná PDR je komplikovaná nelineárna PDR
  - najprv štandardné transformácie: $x = \ln(S/E)$, $\tau = T - t$
  - potom - keďže PDR obsahuje člen $\Gamma = S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ - definuje sa nová funkcia

$$H(x,\tau) = S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

  - rovnica pre $H(x,\tau)$ je už oveľa jednoduchšia kvázilineárna PDR a dá sa pre ňu odvodiť efektívna numerická schéma
  - výpočet ceny opcie $V(S,t)$ z pomocnej funkcie $H(x,\tau)$ nie je zložitý, vedie len na numerický výpočet jedného integrálu

RAPM model

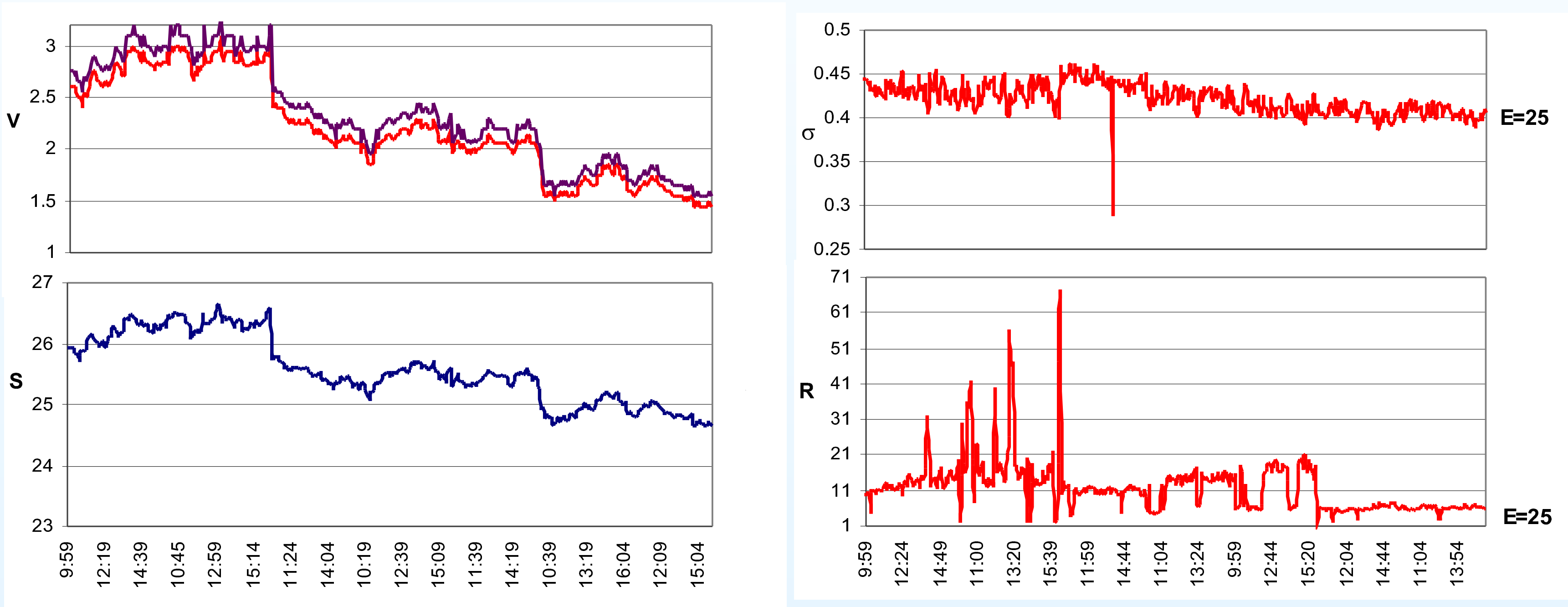
- Podobne ako v Lelandovom modeli - aj v RAPM modeli sa dajú počítať bid a ask ceny opcií
- Ukážka:



(pre porovnanie prušovanou čiarou Black-Scholesova cena opcie)

RAPM model

- Výpočet implikovaných parametrov z reálnych dát - implikovaná volatilita σ a implikovaný parameter rizika R:



Vľavo: vstupné dáta, vpravo: implikované parametre

RAPM model

- Na rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \left[1 + \mu \left(S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^{1/3} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0,$$

sa dá pozerať ako na rovnicu s premenlivou volatilitou $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(S, t)$:

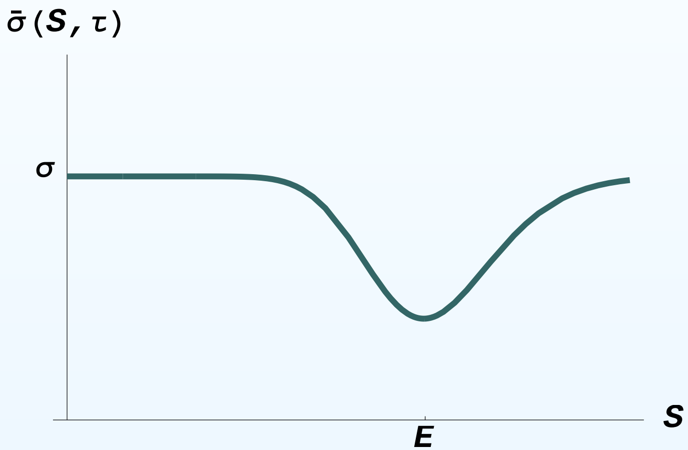
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\tilde{\sigma}^2(S,t)}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} S - rV = 0,$$

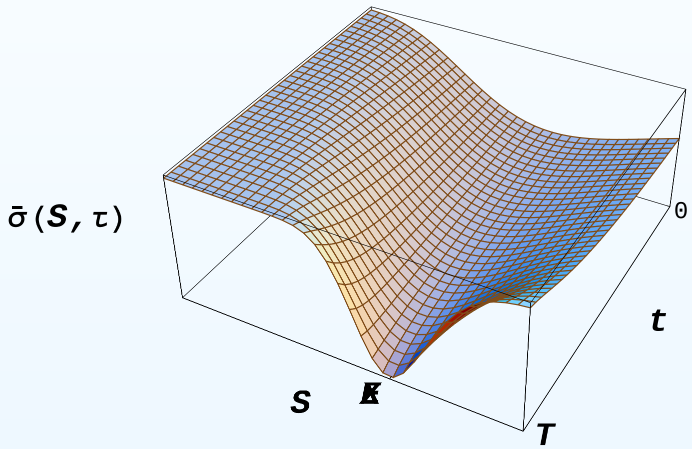
kde

$$\tilde{\sigma}(S,t) = \sigma \left[1 + \mu \left(S \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right)^{1/3} \right]$$

RAPM model

- Ako vyzerá priebeh funkcie $\tilde{\sigma}(S, t)$:





$\Rightarrow$ tento model dokáže vysvetliť volatility smile

Vplyv dominantného investora

R. Frey: **Market illiquidity as a source of the model risk in dynamic hedging**, RISK publications, R. Gibson Ed., London, 2000.

- Black-Scholesov model: môžeme kupovať a predávať ľubovoľné množstvo akcií, nemá to však vplyv na ich cenu
- V prípade veľkého dominantného investora toto nemusí byť pravda - svojou stratégiou môže ovplyvňovať cenu akcie
- Uvažujme dominantného investora, ktorého stratégia pri hedžovaní derivátu charakterizujeme premennými:
  - α_t = počet akcií v čase t
  - β_t = počet bezrizikových dlhopisov čase t (t. j. hotovosť)

  a predpokladjme, že obchodovanie s akciami má vplyv na ich cenu:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw + \rho S d\alpha$$

Vplyv dominantného investora

- Investorova stratégia závisí od ăsu t a od ceny akcie v tomto čase S:

$$\alpha = \Phi(S,t)$$

- Pomocou Itóovej lemy vypočítame $d\alpha$ a dosadíme do vzťahu pre dS, dostaneme:

$$dS = b(S,t)Sdt + \nu(S,t)Sdw,$$

kde

$$\begin{aligned} \nu(S,t) &= \frac{\sigma}{1-\rho S \frac{\partial\Phi}{\partial S}}, \\ b(S,t) &= \frac{1}{1-\rho S \frac{\partial\Phi}{\partial S}} \left(\mu + \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\nu^2}{2} S^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial S^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Vplyv dominantného investora

- PDR sa odvodí presne takým postupom ako v prípade Black-Scholesovho modelu, len namiesto konštanty σ bude funkcia $\nu(S,t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\nu^2(S,t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

- Stratégia dominantného investora:
  - analýza delta hedžingu na základe Black-Scholesovej ceny (nie je vhodná, nereplikuje derivát, ale vždy vedie k vyšším nákladom)
  - výpočet správnej stratégie
  - jej kvalitatívna a kvantitatívna analýza

Vplyv dominantného investora

- Numerické riešenie PDR - tá istá myšlienka ako pri RAPM modeli:
  - transformácia $H(x, \tau) = S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$
  - numericky vyriešime zśkanú kvázilineárnu PDR
  - integráciou z nej získame cenu opcie

Modelovanie investorovych preferencií

S. D. Hodges, A. Neuberger: **Optimal replication of contingent claims under transaction costs**, Advances o Futures and Options Research(1994), 21-35.

G. Barles, H.M. Soner: **Option Pricing with transaction costs and a nonlinear Black-Scholes equation**, Finance Stochast. 2 (1998) 369-397.

- Znovu transakčné náklady:

$$S_{ask} = (1+\mu)S, \; S_{bid} = (1-\mu)S,$$

kde $S = (S_{bid} + S_{ask})/2$

- Uvažujme portfólio:
  $X_t =$ hodnota dlhopisov v dolároch
  $Y_t =$ počet akcií
- Investor má funkciu užitočnosti U s konštantnou averzuiou k riziku γ

Modelovanie investorovych preferencií

- Ak by nebola možnosť obchodovať s opciami:
  - hodnota portfólia v danom čase T je $X_T + Y_T S_T$
  - rieši sa úloha stochastického programovania

$$v^f(x, y, s, t) = \sup \mathbb{E}[U(X_T + Y_T S_T)]$$

pri začiatočných hodnotách $X_t = x$, $Y_t = y$, $S_t = s$

- Ak vypíšeme N call opcií:
  - hodnota portfólia v danom čase exspirácie opcií T je $X_T + Y_T S_T - N(S_T - E)^+$
  - rieši sa úloha stochastického programovania

$$v(x, y, s, t) = \sup \mathbb{E}[U(X_T + Y_T S_T - N(S_T - E)^+)]$$

pri začiatočných hodnotách $X_t = x$, $Y_t = y$, $S_t = s$

Modelovanie investorovych preferencií

- [Hodges, Neuberger]:
  - vzťah medzi týmito dvoma optimalizačnými úlohami
- [Barles, Soner]:
  - konštrukcia optimálnych stratégií, PDR pre cenu opcie
  - matematické nástroje: rovnica dynamického programovania, zavedenie malého parametra a asymptotická analýza, transformácia PDR a jej numerické riešenie
  - výsledná PDR pre cenu opcie má podobný tvar ako v predchádzajúcich modeloch: namiesto konštantnej volatility z Black-Scholesa máme funkciu, ktorá závisí aj od $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ $\Rightarrow$ podobný postup riešenia