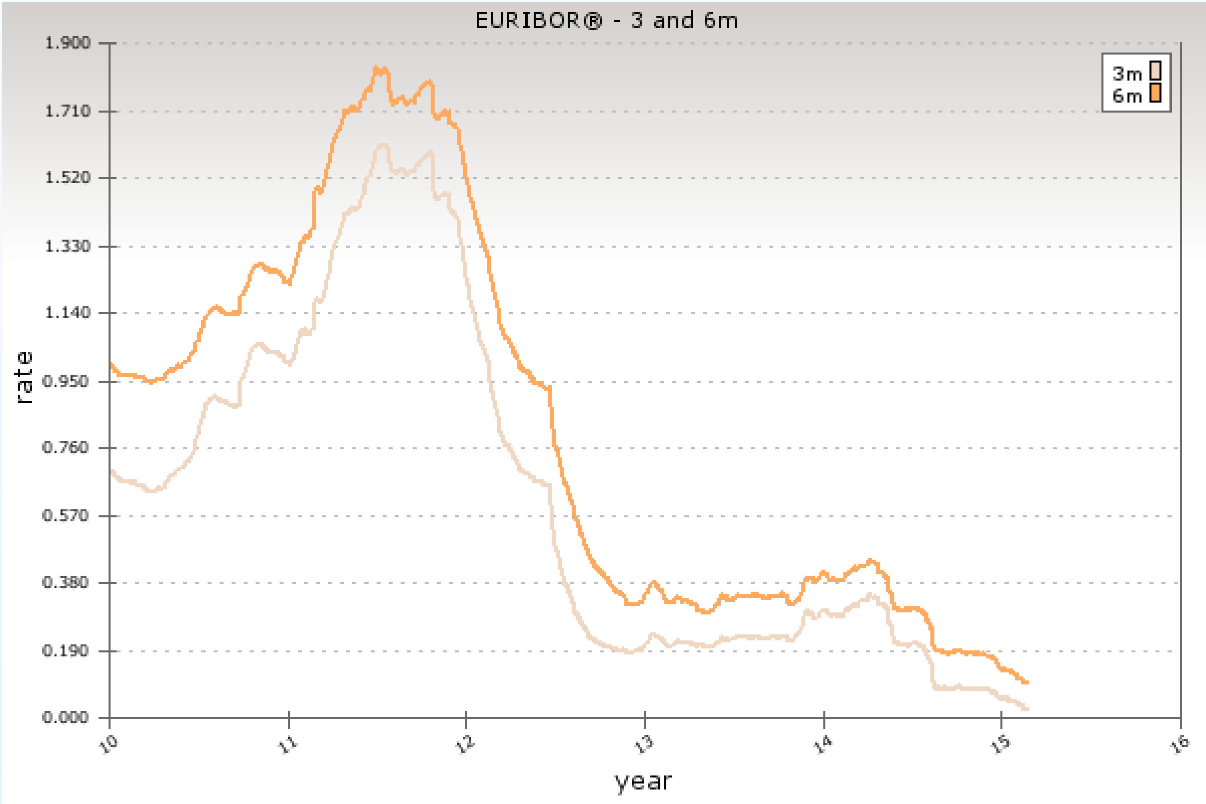
Ceny dlhopisov v short rate modeloch

Beáta Stehlíková
Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Úrokové miery

- Doteraz sme modelovali okamžitú úrokovú mieru
- Teraz: úrokové miery s ostatnými splatnosťami



http://www.euribor-ebf.eu/

Dlhopisy

- Dlhopis
  - cenný papier, ktorý v stanovenom čase (naz. sa splatnosť alebo maturita dlhopisu) vyplatí dohodnutú sumu - nech je to 1 USD
  - $P(t,T)$ = cena dlhopisu v čase t, ak jeho maturita je v čase T
  - $R(t,T)$ = úroková miera s maturitou T v čase t
  - Platí:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \Rightarrow R(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t}$$

- V short rate modeloch: cena dlhopisu P je riešením PDR, $P = P(r,t,T)$

Odvodenie PDR pre dlhopis

- SDR pre short rate:

$$dr = \mu(t,r)dt + \sigma(t,r)dw$$

- Uvažujme dlhopis s maturitou T , potom Itóova lema dáva:

$$dP = \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right)}_{\mu_B(t,r)} dt + \underbrace{\sigma\frac{\partial P}{\partial r}}_{\sigma_B(t,r)} dw$$

- Portfólio: 1 dlhopis s maturitou T_1 a Δ dlhopisov s maturitou T_1 ; jeho hodnota:

$$\Pi = P(r,t,T_1) + \Delta P(r,t,T_2)$$

Odvodenie PDR pre dlhopis

- Zmena hodnoty portfólia:

$$\begin{aligned} d\Pi &= dP(r,t,T_1) + \Delta dP(r,t,T_2) \\ &= (\mu_B(r,t,T_1) + \Delta\mu_B(r,t,T_2))\,dt \\ &\quad +(\sigma_B(r,t,T_1) + \Delta\sigma_B(r,t,T_2))\,dw \end{aligned}$$

- Eliminujeme náhodnosť tým, že zvolíme

$$\Delta = -\frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)},$$

potom

$$d\Pi = \left(\mu_B(t,r,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)}\mu_B(t,r,T_2)\right)dt$$

Odvodenie PDR pre dlhopis

- Výnos bezrizikového portfólia musí byť r (okamžitá úroková miera), t.j. $d\Pi = r\Pi dt$:

$$\mu_B(t,r,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)}\mu_B(t,r,T_2) = r\Pi$$

- Dosadíme:

$$\mu_B(t,r,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)}\mu_B(t,r,T_2)$$

$$= r\left(P(t,r,T_1) - \frac{\sigma_B(t,r,T_1)}{\sigma_B(t,r,T_2)}P(t,r,T_2)\right)$$

Odvodenie PDR pre dlhopis

- Maturity T_1, T_2 boli ľubovoľné, preto musí existovať $\lambda = \lambda(r,t)$ tak, že pre každé t:

$$\lambda(r,t) = \frac{\mu_B(r,t,T) - rP(r,t,T)}{\sigma_B(r,t,T)}$$

- Funkcia $\lambda = \lambda(r,t)$ nezávisí od maturity T; nazýva sa trhová cena rizika
- Záver: PDR pre cenu dlhopisu $P = P(r,t)$ je

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r,t) - \lambda(r,t)\sigma(r,t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r,t)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0.$$

pre $r \in (0,\infty), t \in (0,T)$ s koncovou podmienkou $P(r,T) = 1$ pre $r \in (0,\infty)$

Explicitné riešenia

- Explicitné riešenie pre cenu dlhopisu:
  - Vašíčkov model s trhovou cenou rizika $\lambda(r,t) = \lambda$
  - CIR model s trhovou cenou rizika $\lambda(r,t) = \lambda\sqrt{r}$
- Riešenie hľadáme v tvare

$$P(r,\tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

kde $\tau = T - t$

- Dosadíme do PDR pre cenu dlhopisu $\Rightarrow$ dostaneme systém obyčajných diferenciálnych rovníc pre funkcie $A(\tau), B(\tau)$ $\Rightarrow$ tento systém sa dá explicitne vyriešiť

Vašíčkov model

- Systém ODR:

$$
\begin{aligned}
-\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2} A B^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma) A B &= 0 \\
\dot{B} + \kappa B - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

  so začiatočnými pomienkami $A(0) = 1, B(0) = 0$

- Funkcie A, B:

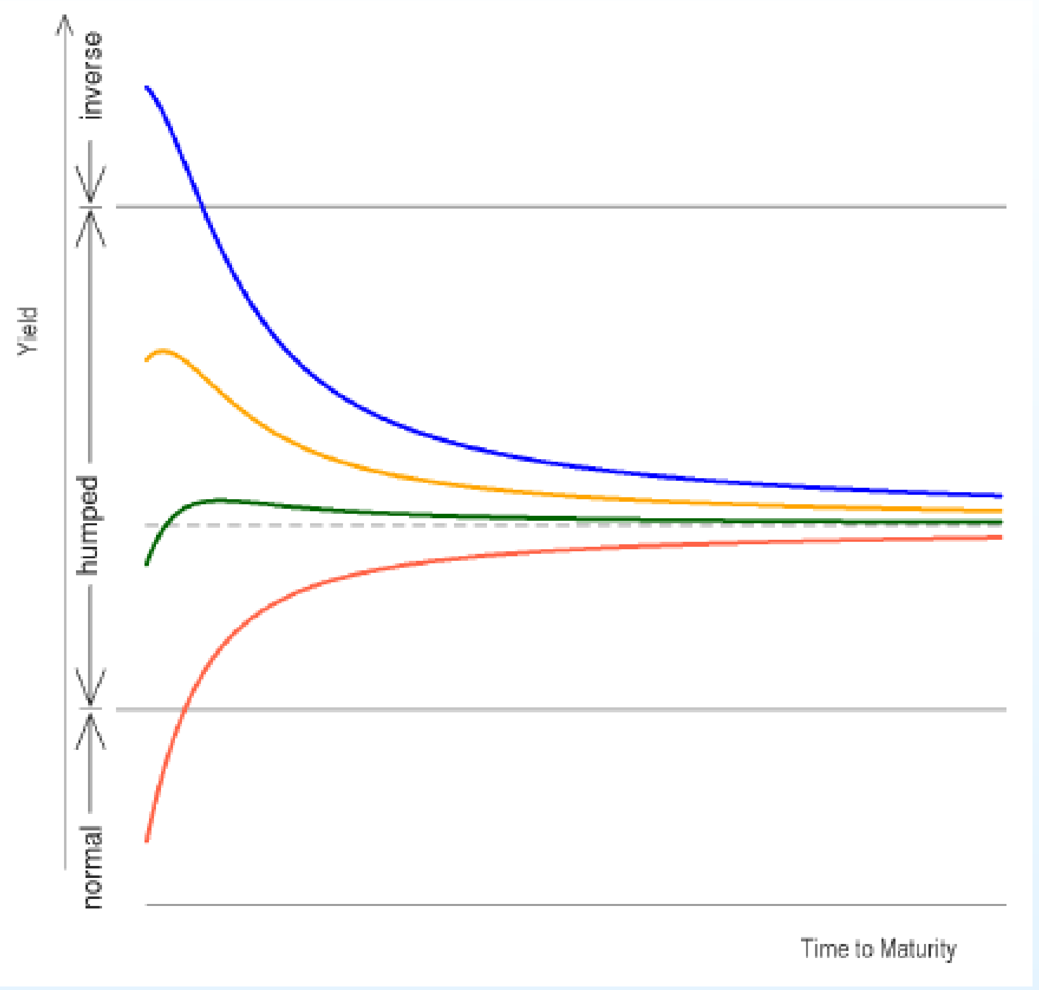
$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa},$$

$$\log A(\tau) = \left[\frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}) - \tau \right] R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa\tau})^2,$$

  kde $R_\infty = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$

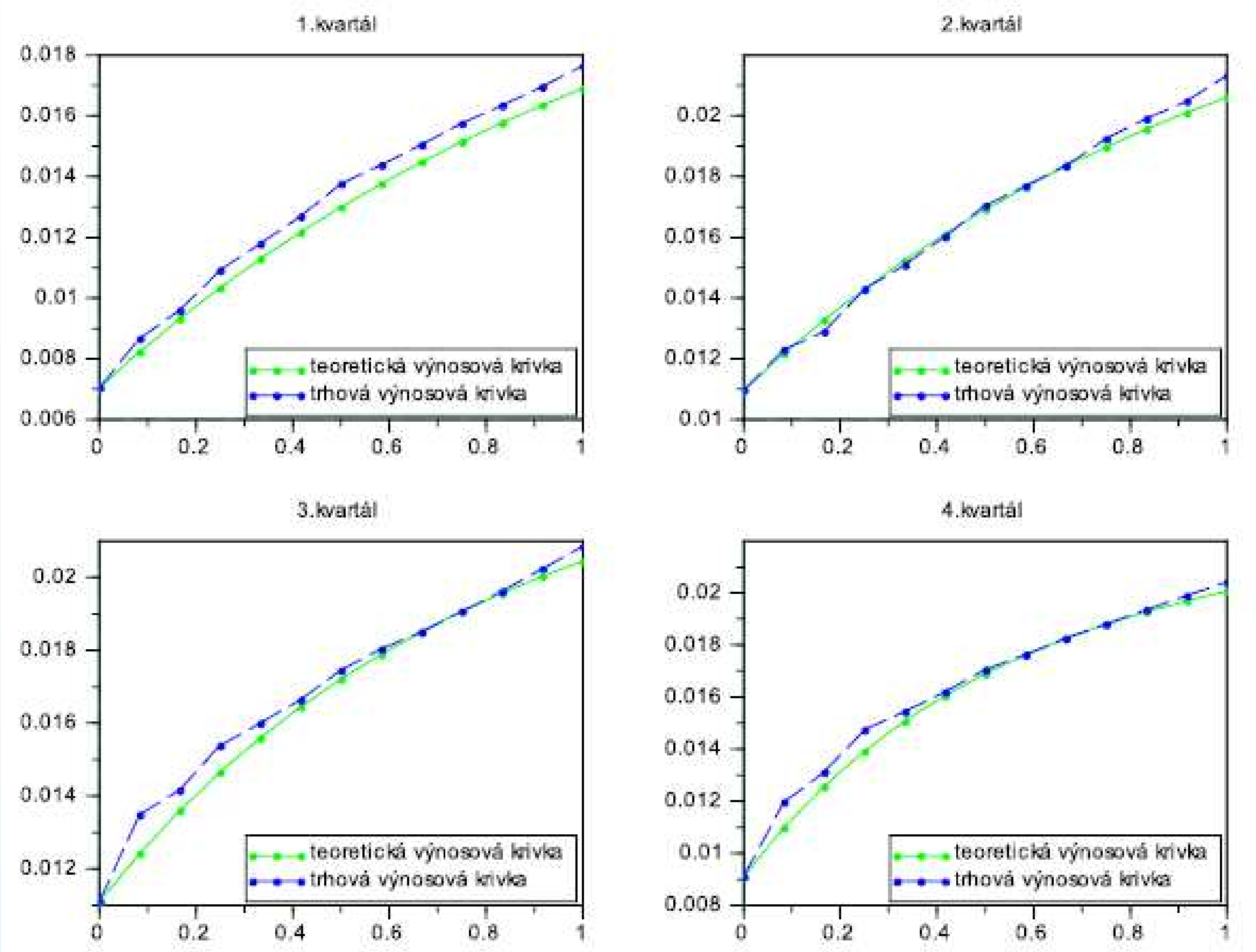
- Platí: R_∞ je limita výnosových kriviek

Tvary výnosových kriviek



M. Keller-Ressel, T. Steiner: **Yield Curve Shapes and the Asymptotic Short Rate Distribution in Affine One-Factor Models** - tvary kriviek vo všeobecnom 1-fakt. modeli

Kalibrácia: Euribor, 2011

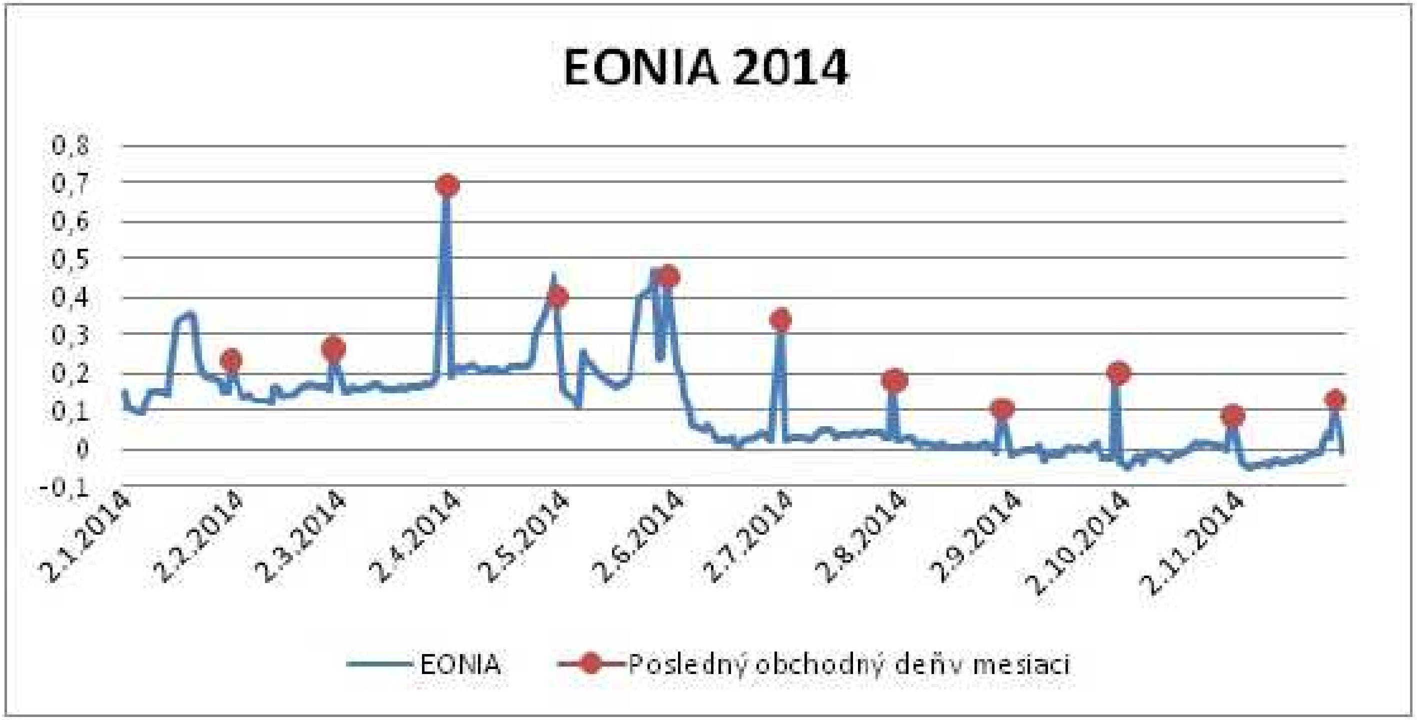


Simona Chattová, diplomová práca (2013)

Čo má byť short rate?

- V predchádzajúcom príklade 1W Euribor; prečo nie overnight (Eonia):

Obr. 2: Výška sadzby EONIA v priebehu roku 2014 a vyznačené konce mesiacov (Zdroj: EMMI)



Juraj Ivan, bakalárska práca (2015)

Čo má byť short rate?

- Odhadovanie short rate spolu s parametrami Vašíčkovho modelu:

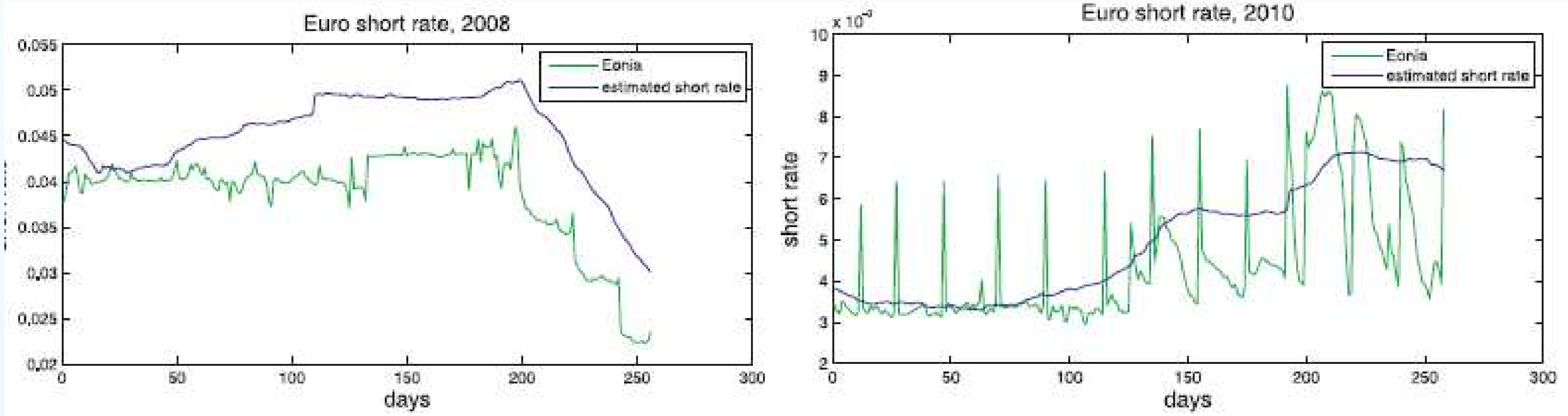


FIGURE 5. Comparison of the estimated short rate and the overnight for Euribor: 2008 (left), 2010 (right).

J. Halgašová, B. Stehlíková, Z. Bučková: **Estimating the short rate from the term structures in the Vasicek model**, Tatra Mountains Mathematical Publications 61 (2014), 87-104

CIR model

- Systém ODR:

$$\begin{aligned} \dot{A} + \kappa\theta AB &= 0, \\ \dot{B} + (\kappa + \lambda\sigma)B + \frac{\sigma^2}{2}B^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

  so začiatočnými pomienkami $A(0) = 1, B(0) = 0$

- Funkcie A, B:

$$B(\tau) = \frac{2\left(e^{\phi\tau} - 1\right)}{(\psi + \phi)\left(e^{\phi\tau} - 1\right) + 2\phi},$$

$$A(\tau) = \left(\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\tau/2}}{(\phi + \psi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}},$$

  kde $\psi = \kappa + \lambda\sigma, \quad \phi = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2} = \sqrt{(\kappa + \lambda\sigma)^2 + 2\sigma^2}.$

Všeobecný jednofaktorový model

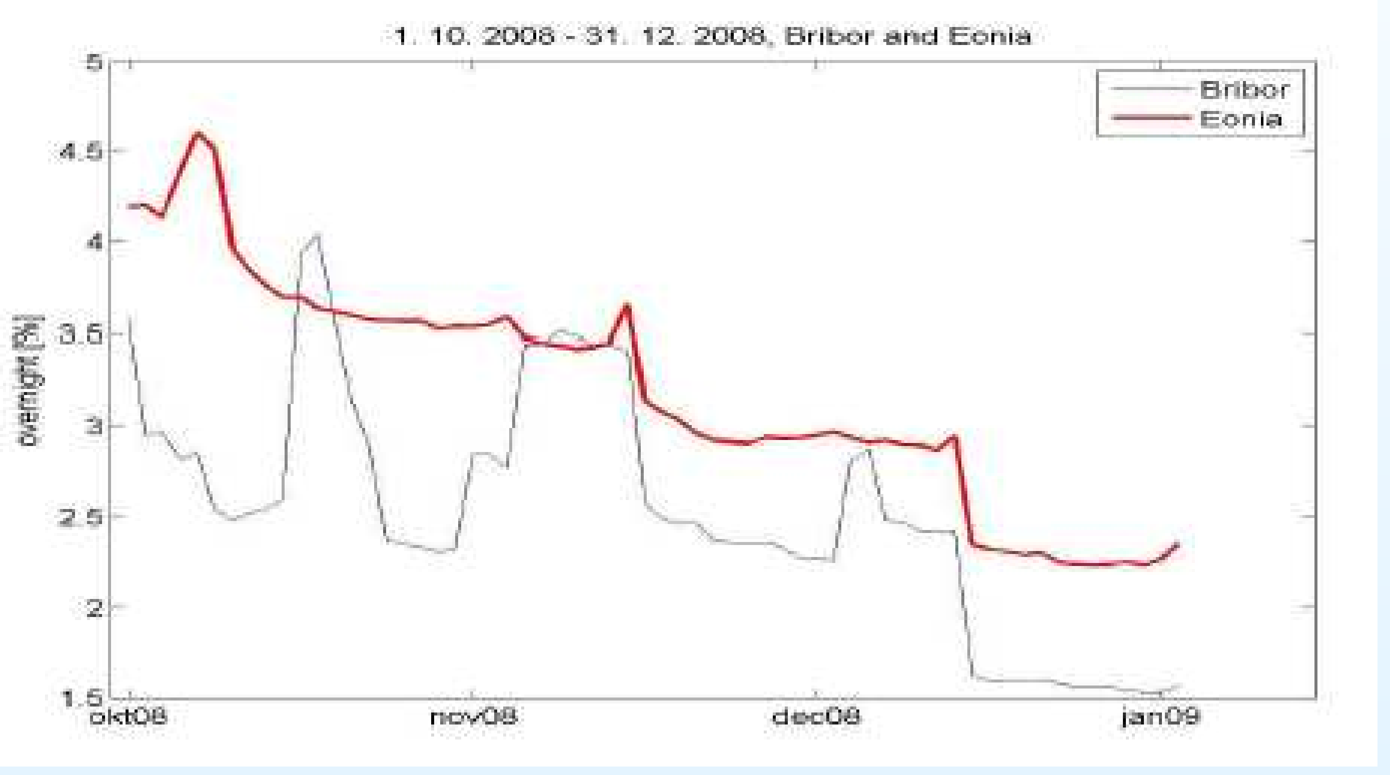
- Vo všeobecnosti neexistuje explicitné riešenie
- Numerické riešenie PDR, analytické aproximáčné formuly, Monte Carlo simulácie
- Napríklad (so zameraním na môj výskum v tejto oblasti):
  - Y. Choi, T. Wirjanto, : **An analytic approximation formula for pricing zero- coupon bonds**, Finance Research Letters 4 (2007), pp. 116-126.
  - B. Stehlíková, D. Ševčovič: **Approximate formulae for pricing zero-coupon bonds and their asymptotic analysis.** International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 6(2) 2009, 274-283.
  - T. Chernogorova, B. Stehlíková: **A Comparison of Asymptotic Analytical Formulae with Finite-Difference Approximations for Pricing Zero Coupon Bond**. Numerical Algorithms 59 (4), 2012, pp. 571-588.
  - B. Stehlíková, L. Capriotti: **An Effective Approximation for Zero Coupon Bonds and Arrow-Debreu Prices in the Black-Karasinski Model**, International Journal of Theoretical and Applied Finance 17, 2014, 1450037

Viacfaktorové modely

- Motivácia:
  - výnosová krivka nie je jednoznačne určená hodnotou okamžitej úrokovej miery
  - viac možných tvarov výnosových kriviek
  - samotné modelovanie okamžitej úrokovej miery

Konvergenčné modely

- Domáca úroková miera pred vstupom do menovej únie je ovplyvňovaná úrokovou mierou v menovej únii
- Ukážka: Slovensko pred prijatím eura:



Konvergenčné modely

- Prvý model:

  T. Corzo and E. S. Schwartz: **Convergence within the European Union: Evidence from interest rates**. Econom. Notes 29, 2000, 243-268.

- Tieto modely sú predmetom výskumu na katedre, napr.

  Z. Zíková, B. Stehlíková: **Convergence model of interest rates of CKLS type**. Kybernetika 48, 2012, 567-586

Short rate ako súčet dvoch faktorov

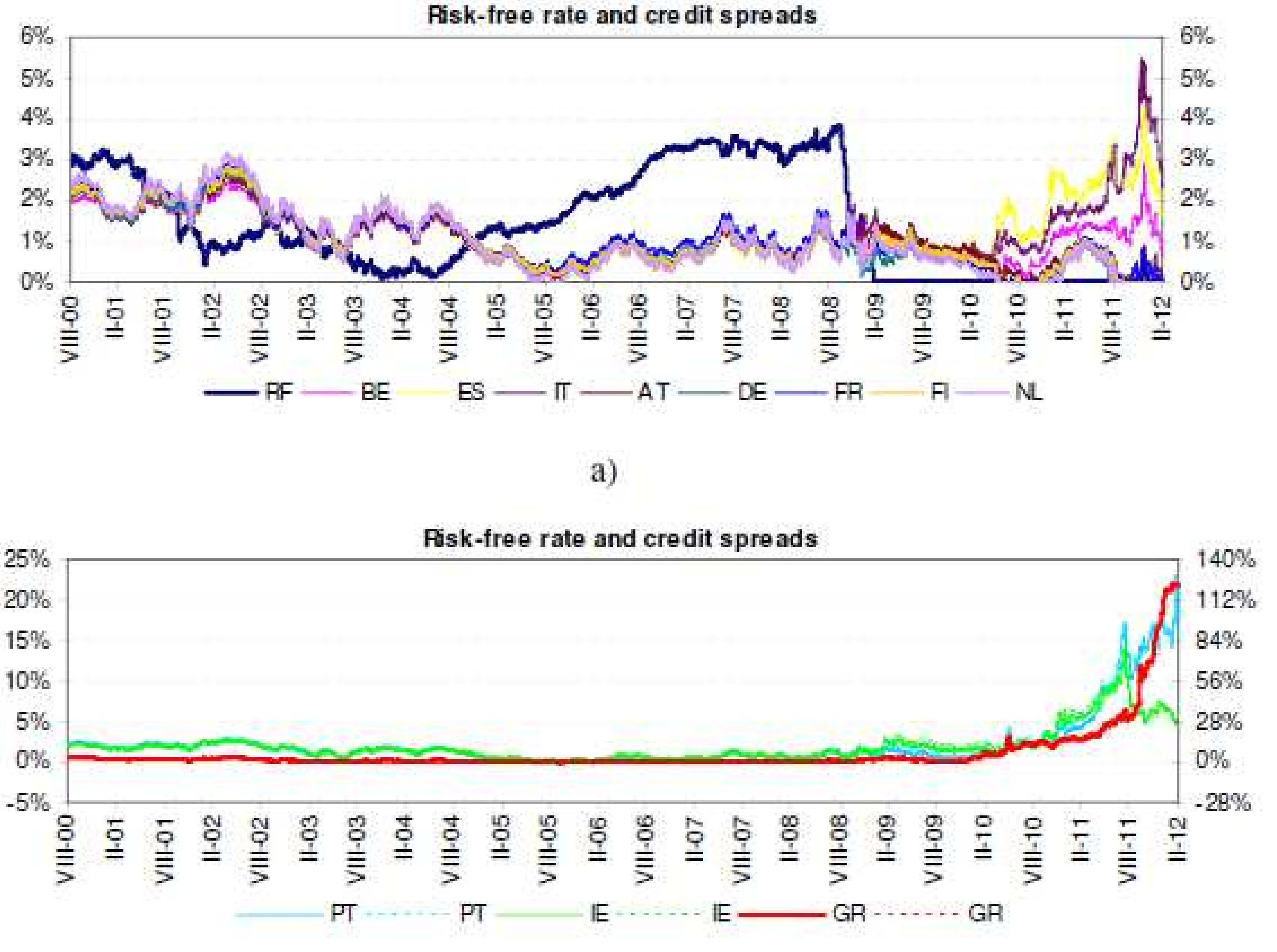
- Okamžitá úroková miera ako súčet dvoch faktorov, každý z nich je modelovaný stochastickou diferenciálnou rovnicou (napr. Vašíčkovho alebo CIR typu)
- Aplikácia:

  Ľ. Šesták: **Mathematical Analysis and Calibration of a Multifactor Panel Model for Credit Spreads and Risk-free Interest Rate** , dizertačná práca, FMFI UK, 2012

$$r = r^{rf} + r^{cs},$$

kde r^{rf} je risk-free rate (spoločná pre všetky štáty) a r^{cs} je credit spread (pre každý štát samostatne)

Short rate ako súčet dvoch faktorov



Dvojfaktorové modely

- Model pre okamžitú úrokovú mieru: $r = r(x, y)$, pričom x, y sú faktory spĺňajúce systém

$$
\begin{aligned}
dx &= \mu_x(x, y, t)dt + \sigma_x(x, y, t)dw_1 \\
dy &= \mu_y(x, y, t)dt + \sigma_y(x, y, t)dw_2
\end{aligned}
$$

  korelácia: $\mathbb{E}[\overset{dw_1\, dw_2}{\cancel{dx\, dy}}] = \rho\, dt$

- Cena dlhopisu: $P = P(x, y, t)$
- PDR pre $P(x, y, t)$: znovu portfólio z dlhopisov s rôznymi maturitami (teraz tromi), také počty dlhopisov, aby portfólio bolo nenáhodné