Oceňovanie exotických derivátov

Beáta Stehlíková
Finančné deriváty, FMFI UK Bratislava

Exotické opcie

- Path-dependent options - payoff závisí nielen od hodnoty aktíva v čase exspirácie, ale aj od jej vývoja do exspirácie
- Zníženie rizika z okamžitých výkyvov ceny aktíva
- Bonusová úloha 2013, nárast ceny akcie posledný deň pred exspiráciou opcií:

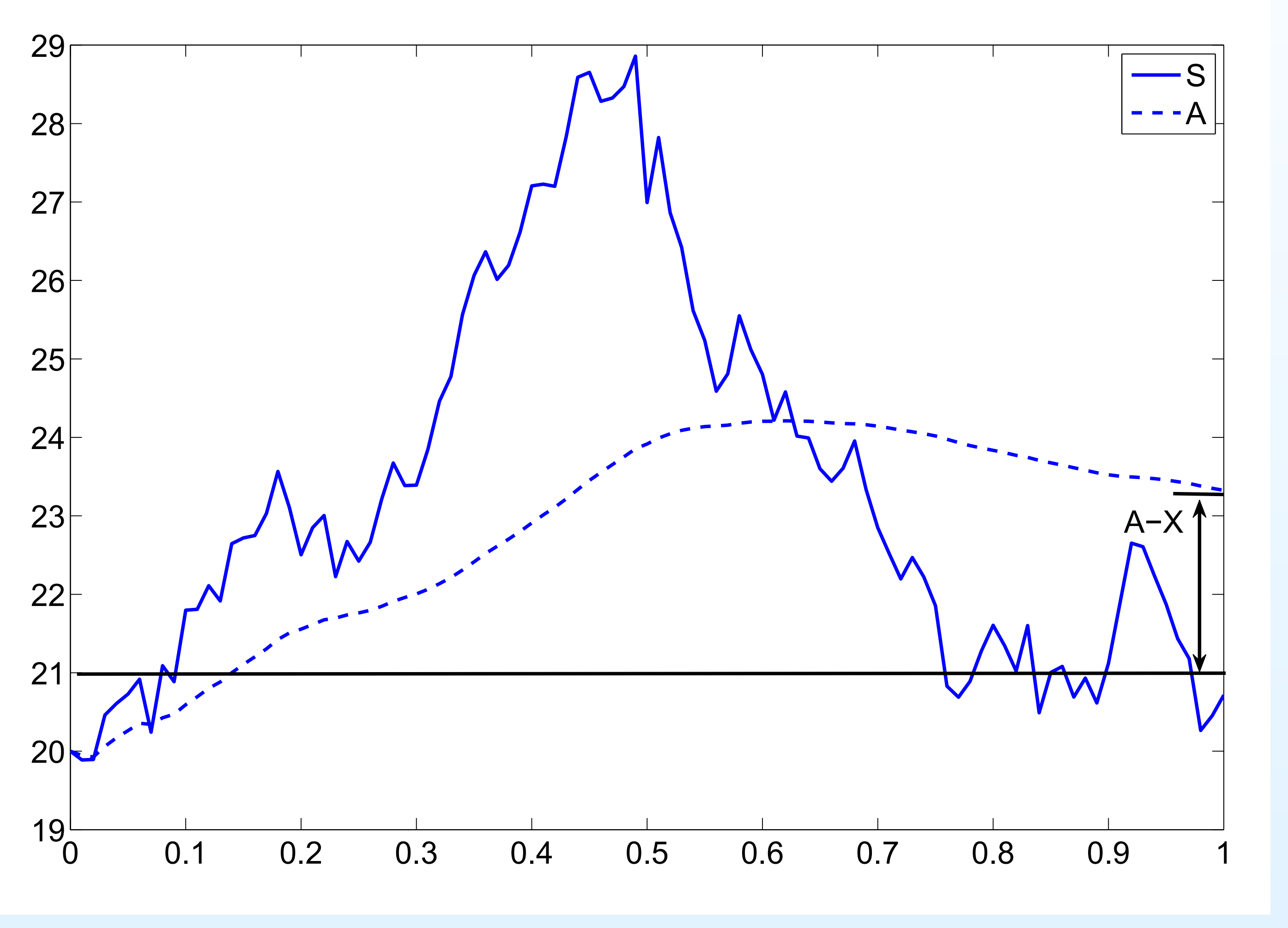
http://finance.yahoo.com/

Ázijské opcie

- Payoff závisí od historického priemeru ceny aktíva
- Klasifikácia ázijských opcií:
  - podľa typu spriemerovania - aritmetický alebo geometrický priemer
  - podľa pozície spriemerovanej veličiny v payoffe - môže byť v úlohe ceny aktíva alebo exspiračnej ceny
- Typ spriemerovania:
  - aritmetický priemer:
    v diskrétnom prípade $A_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_{t_i}$
    v spojitom prípade $A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$
  - geometrický priemer:
    v diskrétnom prípade $\ln A_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln S_{t_i}$
    v spojitom prípade $\ln A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau$

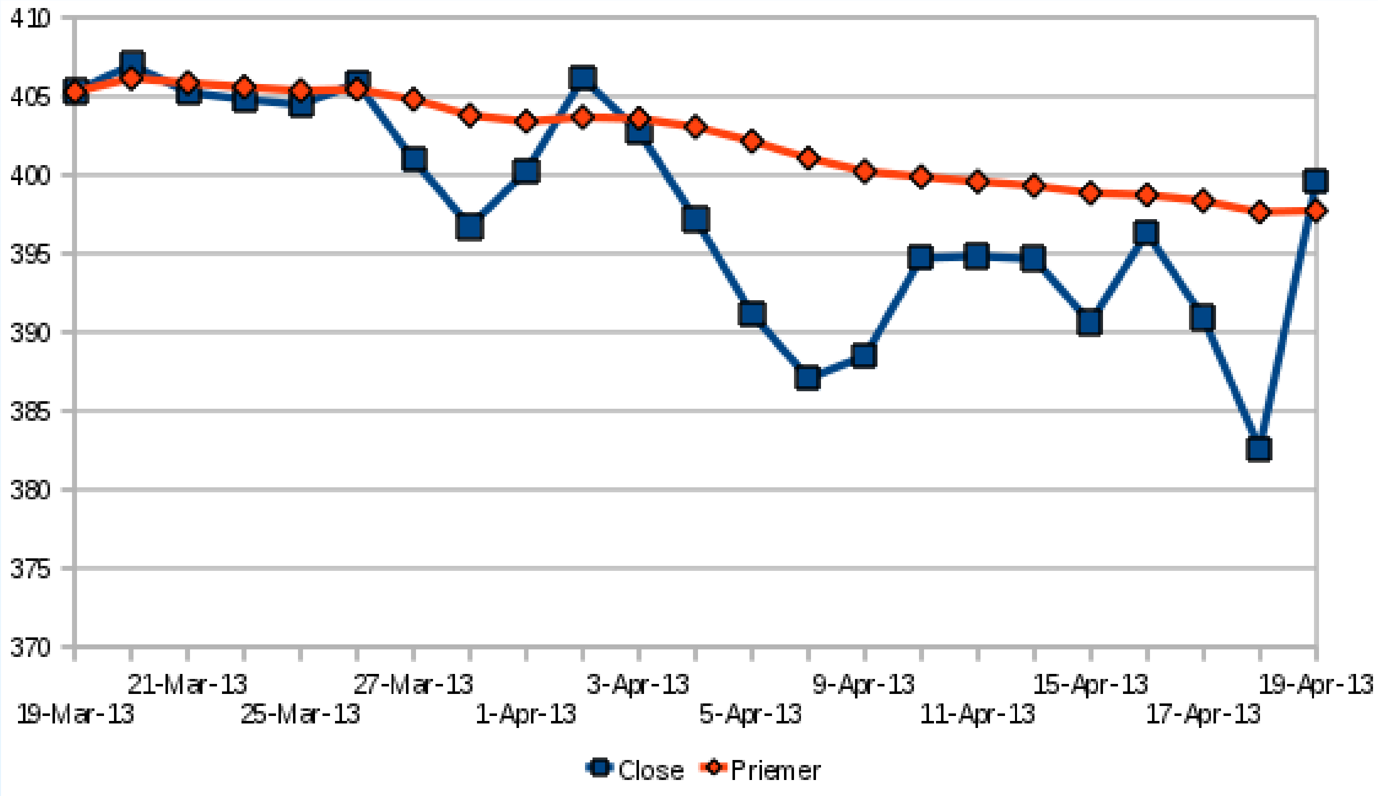
Ázijské opcie

- Vývoj ceny aktíva a vývoj priemeru (prerušovaná čiara):



Ázijské opcie

- Vývoj ceny aktíva a vývoj priemeru - Google 2013 z prvého slajdu:



Ázijské opcie

- Pozícia spriemerovanej veličiny v payoffe:
  - spriemerovaná cena A je v payoffe v pozícii ceny aktíva - hovoríme o average rate call, resp. put opcii:

$$V(S,A,T) = \max(A - E, 0) \quad \text{pre call}$$
$$V(S,A,T) = \max(E - A, 0) \quad \text{pre put}$$

  - spriemerovaná cena A je v payoffe v pozícii exspiračnej ceny - hovoríme o average strike call, resp. put opcii:

$$V(S,A,T) = \max(S - A, 0) \quad \text{pre call}$$
$$V(S,A,T) = \max(A - S, 0) \quad \text{pre put}$$

- Teda máme napríklad:
  - *ázijskú aritmeticky spriemerovanú average rate call opciu*,
  - *ázijskú geometricky spriemerovanú average strike put opciu*, ... spolu 8 typov

Diferenciál spriemerovanej ceny

- Pracujeme so spojitým časom
- Aritmetický priemer:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{t^2}\int_0^t S_\tau d\tau + \frac{1}{t}S_t = \frac{S_t - A_t}{t}$$

- Geometrický priemer:

$$\frac{dA}{dt} = A_t\left[-\frac{1}{t^2}\int_0^t \ln S_\tau d\tau + \frac{1}{t}\ln S_t\right] = A_t\,\frac{\ln S_t - \ln A_t}{t}$$

- V oboch prípadoch:

$$dA = A\, f\left(\frac{S}{A}, t\right) dt,$$

pričom $f(x,t) = (x-1)/t$, resp. $f(x,t) = (\ln x)/t$

PDR pre cenu ázijskej opcie

- Geometrický Brownov pohyb pre cenu akcie $dS = \mu S dt + \sigma S dw$, akcia vypláca spojité dividendy s dividendovou mierou D
- Cena opcie $V = V(S, A, t)$:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial A} A f\left(\frac{S}{A}, t \right) \right) dt$$

- Rovnaký postup ako v Black-Scholesovom modeli:
  - konštrukcia portfólia (opcia + akcie)
  - eliminácia náhodnej zložky v SDR pre hodnotu portfólia
  - výnos bezrizikového portfólia musí byť rovný r (bezrizikovej úrokovej miere)

PDR pre cenu ázijskej opcie

- Výsledná PDR pre cenu ázijskej opcie $V(S, A, t)$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} + A f\left(\frac{S}{A}, t\right) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0$$

pre $S \in (0, \infty)$, $A \in (0, \infty)$, $t \in (0, T)$

- Koncová podmienka podľa typu opcie, napr.

$$V(S, A, T) = \max(S - A, 0)$$

pre $S \in (0, \infty)$, $A \in (0, \infty)$

- Tri premenné, iba jedna druhá derivácia $\rightarrow$ v tomto tvare nie je PDR veľmi vhodná na numerické riešenie $\rightarrow$ pre average strike opciu spravíme transformáciu

Transformácia pre average strike opcie

- Transformácia:

$$V(S, A, t) = AW(x, t), \quad x = \frac{S}{A}$$

- PDR pre funkciu $W(x, t)$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (r - D) x \frac{\partial W}{\partial x} + f(x, t) \left(W - x \frac{\partial W}{\partial x} \right) - rW = 0$$

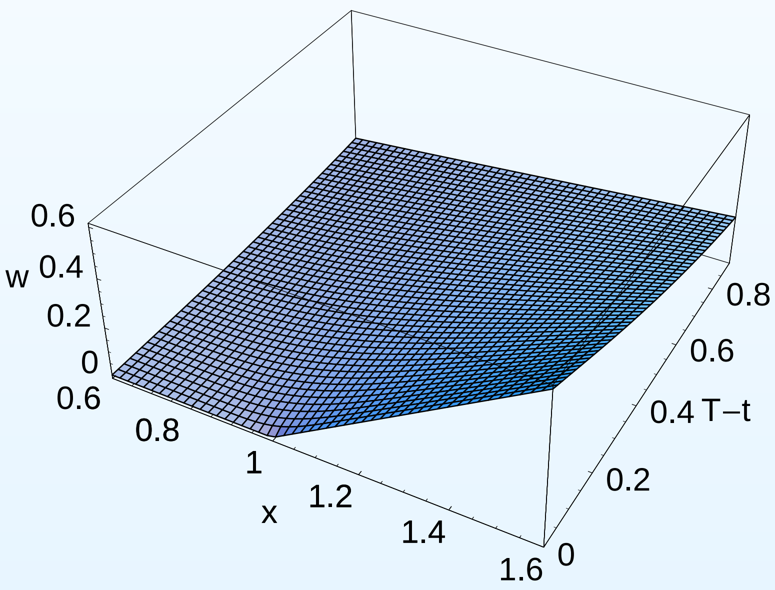
  pre $x \in (0, \infty)$, $t \in (0, T)$

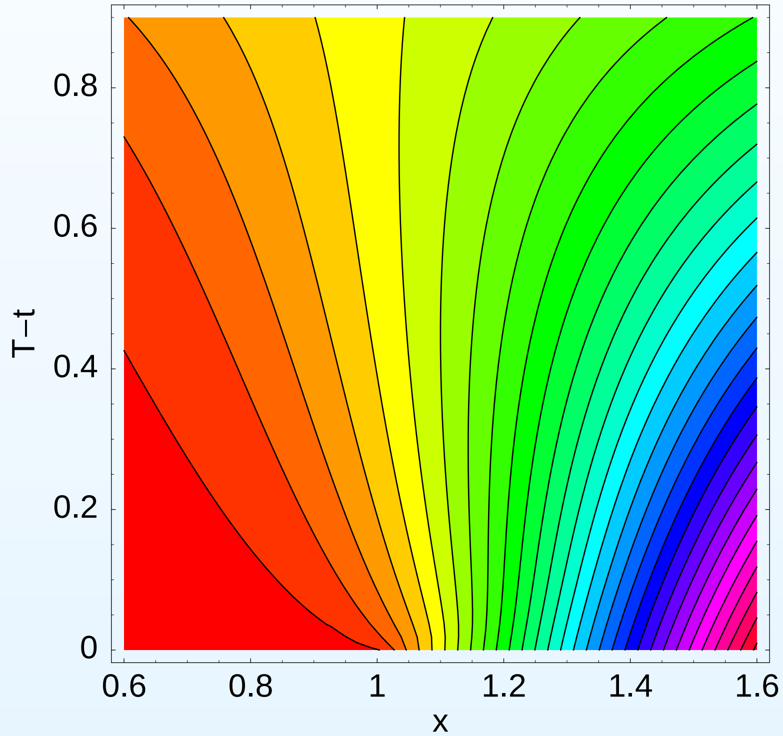
- Koncová podmienka pre $x \in (0, \infty)$:

$$W^{call}(x, T) = \max(x - 1, 0), \quad W^{put}(x, T) = \max(1 - x, 0)$$

Average strike opcie - ukážka

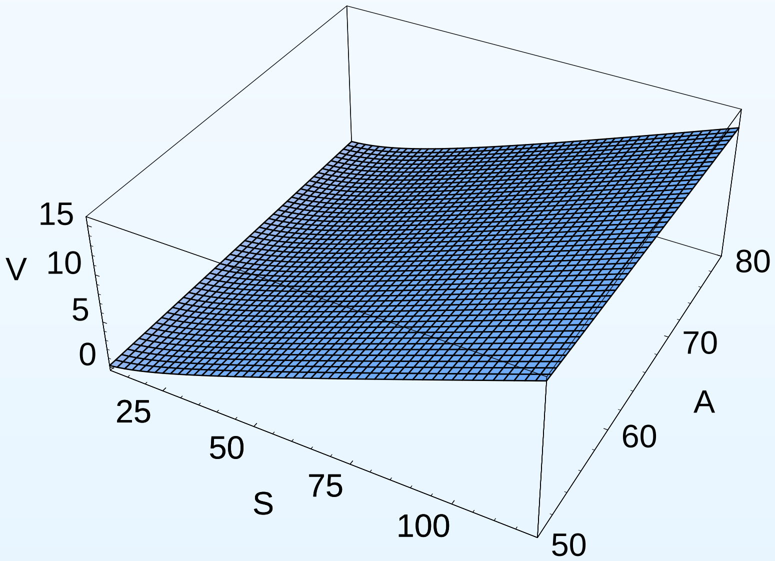
- Pomocná funkcia $W(x,t)$:

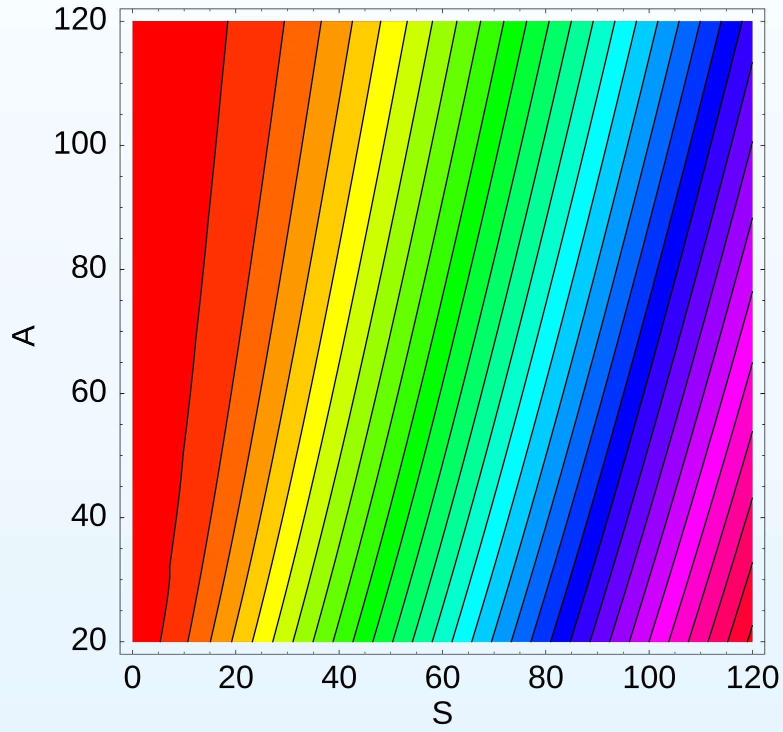




Average strike opcie - ukážka

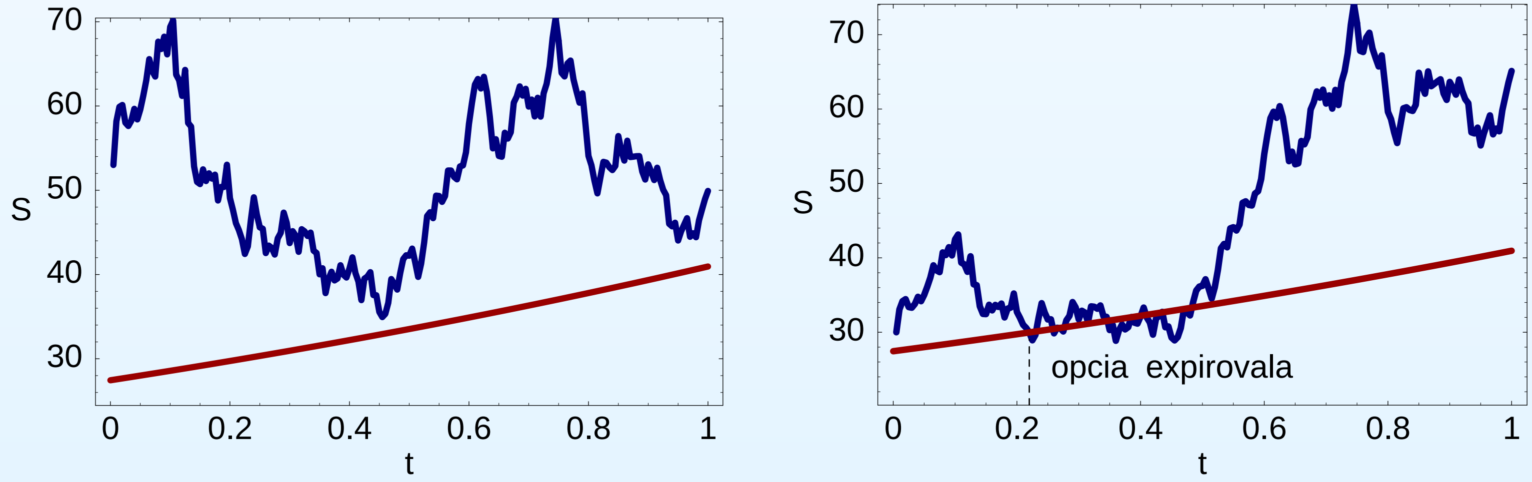
- Cena opcie $V(S, A, t)$ pre zvolené t:





Bariérové opcie

- V podstate klasické call a put opcie
- Ale s tým, že ak niekedy počas trvania opcie cena akcie dosiahne zadanú bariérovú funkciu, tak:
  - opcia stráca svoju platnosť
  - vypisovateľ opcie jej držiteľovi vyplatí rabat
- Príklad: cena akcie (modra), bariéra (hnedá)



Bariérové opcie - bariéra a rabat

- Klasifikácia bariér:
  - down-and-out: ak cena akcie dosiahne zadanú bariéru zhora
  - up-and-out: ak cena akcie dosiahne zadanú bariéru zdola
- Typický príklad bariéry:

$$B(t) = bEe^{-\alpha(T-t)},$$

  kde $0 < b \leq 1, \alpha \geq 0$ sú konštanty
- Príklad rabatu:

$$R(t) = E\left(1 - e^{-\beta(T-t)}\right),$$

  kde $\beta \geq 0$ je konštanta - spĺňa podmienku $R(T) = 0$

PDR pre down-and-out opciu

- Opcia je platná v oblasti $S > B(t)$ - tu musí byť splnená Black-Scholesova rovnica, teda:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

  pre $S \in (B(t), \infty), t \in (0, T)$.

- Na okraji platnosti opcie - teda pre $S = B(t)$ - opcia exspiruje a jej hodnota sa rovná rabatu:

$$V(B(t), t) = R(t)$$

  pre $t \in (0, T)$.

- Terminálová podmienka pre $S \in (B(t), \infty), t = T$ závisí od typu opcie:

$$V^{call}(S, T) = \max(0, S - E), \quad V^{put}(S, T) = \max(0, E - S)$$

PDR pre down-and-out opciu

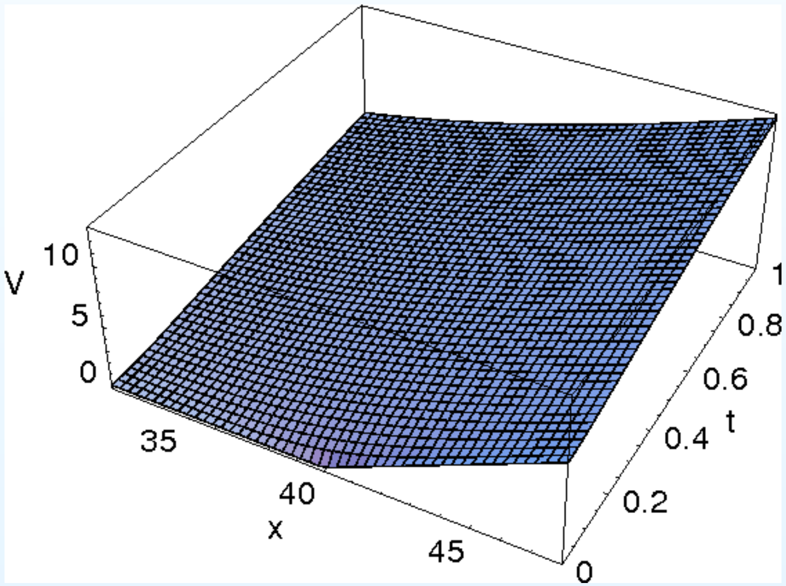
- Transformácia na pevnú oblasť $x \in (0, \infty)$:
$$V(S,t) = W(x,t), \quad x = \ln\left(\frac{S}{B(t)}\right),$$
- PDR pre funkciu W:
$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \left(r - D - \frac{\sigma^2}{2} - \alpha\right)\frac{\partial W}{\partial x} - rW = 0$$
pre $x \in (0, \infty), t \in (0, T)$.
- Okrajová podmienka: $W(0,t) = R(t)$ pre $t \in (0, T)$.
- Terminálová podmienka:
$$V^{call}(x,T) = E\max(0, be^x - 1)$$
$$V^{put}(x,T) = E\max(0, 1 - be^x)$$
pre $x \in (0, \infty)$.

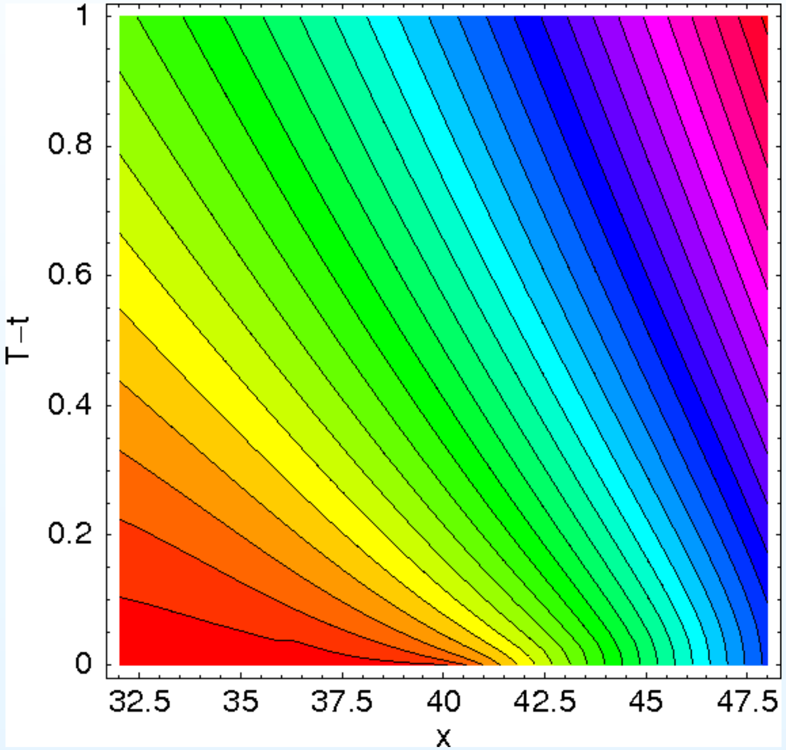
Up-and-out opcia: DÚ

- Matematicky zapíšte úlohu oceňovania up-and-out opcie: PDR (na akej oblasti), okrajová podmienka, terminálová podmienka
- Transformujte túto úlohu na PDR na pevnej oblasti

Bariérové opcie - ukážka

- Cena bariérovej opcie :





Bariérové opcie - interaktívne

- Na stránke:
  http://demonstrations.wolfram.com/BarrierOptionPricingWithinTheBlackScholesModel/
- Treba prehliadač, dostupný na:
  http://demonstrations.wolfram.com/download-cdf-player.html