Finančné deriváty 2022/2023

Vzorová skúška

1 Vzorová písomná časť

Inštrukcie:

- Čas na vypracovanie: 90 minút
- Bez použitia poznámok, kalkulačky, notebookov, mobilu a pod. Povolený je **ťahák vo formáte A4** (môže byť popísaný z obidvoch strán)
- Okrem posledného prípaku treba odpovede uvedené v riešení odvodiť, za odpoveď bez zdôvodnenia nie sú žiadne body. Takisto nie sú body za napísanie tvrdení súvisiacich so zadaním, ak neboli nijako využité pri riešení. Čiastočný počet bodov sa však dá získať za neúplné riešenie.

Zadanie:
Ak nie je povedané inak, platia Black-Scholesove predpoklady, deriváty sú európskeho typu a akcia nevypláca dividendy.

1. **(6 bodov)** Kúpili sme derivát, ktorý predstavuje balík 10 call opcií s strikom 50 s rovnakým časom exspirácie. Ich vypisovateľ však avizuje, že bude mať vo svojom portfóliu len 5 akcií, a že ak by náš payoff v čase exspirácie mal byť vyšší ako $5S$, tak dostaneme len $5S$. V opačnom prípade bude náš payoff rovný klasickému payoffu call opcií, teda $10\max(S-50,0)$. Vypočítajte cenu takéhoto derivátu a vyjadrite ju pomocou distribučnej funkcie normalizovaného normálneho rozdelenia. Bez dôkazu môžete použiť vzorec pre cenu call opcie.

2. **(6 bodov)** Predpokladajme, že okamžitá úroková miera r sa vyvíja podľa Vašíčkovho modelu. Majme derivát, ktorý v čase exspirácie vyplatí sumu číselne rovnú druhej mocninej okamžitej úrokovej miery vyjadrenej v percentách. Ak teda napr. $r = 0.02$ (čo sú dve percentá), tak dostaneme payoff $2^2 = 4$. Rozhodnite, či sa cena takéhoto derivátu dá zapísať v tvare $V(r,t) = f(t)r^2$ a svoje tvrdenie dokážte.

3. - **(6 bodov)** Predpokladajme, že chceme oceniť derivát s payoffom S^2. Z cvičení vieme, že jeho cena má tvar $V(S,t) = \alpha(t)S^2$, ale funkcia $\alpha(t)$ sa nerovná identicky jednej (teda riešenie nie je v každom čase rovné S^2, o čom sa môžeme predvedčiť aj dosadením do Black-Scholesovej PDR - nebude splnená).

Predstavme si však nasledujúci *alternatívny* postup:
Zaveďme substitúciu $Y = S^2$. Potom, ak $dS = \mu S dt + \sigma S dw$, tak pre Y máme

$$dY = 2S\, dS + \frac{1}{2} 2\, (dS)^2 = 2\mu S^2 dt + 2\sigma S^2 dw + \sigma^2 S^2 dt,$$

teda aj Y je geometrický Brownov pohyb

$$dY = (2\mu + \sigma^2) Y dt + 2\sigma Y dw.$$

PDR pre cenu derivátu v premennej Y potom je (dosadíme do Black-Scholesovej rovnice novú volatilitu)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rY \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{1}{2} (2\sigma)^2 Y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} - rV = 0$$

s koncovou podmienkou $V(Y, T) = Y$. Jej riešením je $V(Y, t) = Y$, môžeme sa o tom presvedčiť dosadením. To ale znamená, že cena derivátu v pôvodných premenných je S^2.

Dostali sme sa k zlému výsledku. Kde je v tomto riešení chyba? (Ide o logickú chybu, nie o numerickú chybu pri derivovaní a pod.)

- **(6 bodov)** Pre určitú špeciálnu kombináciu parametrov modelu je výsledok $V(S, t) = S^2$ z predchádzajúceho bodu správny. Zistite, pre akú a vysvetlite, prečo v tomto prípade predchádzajúci postup dáva správny výsledok (na rozdiel od všeobecného prípadu).

4. **(16 bodov)** O nasledujúcich tvrdeniach rozhodnite, či sú pravdivé. Píšte len odpovede, za každú správnu odpoveď je **1 bod**, za každú nesprávnu je **mínus 1 bod**, za otázku bez odpovede je **0 bodov**.

   (a) Cena opcie, ktorá vyplatí 1 USD, ak bude cena akcie v čase exspirácie menšia ako 100 USD (inak nevyplatí nič), je konvexnou funkciou premennej S.

   (b) Limita ceny call opcie, ak volatilita akcie ide k nule, sa vždy rovná nule.

   (c) Ázijské opcie sú charakteristické tým, že ich payoff závisí od ceny viacerých akcií v čase exspirácie.

   (d) PSOR metóda sa dá využiť pri numerickom oceňovaní amerických opcií.

   (e) Úroková miera s 10 ročnou maturitou je vo Vašíčkovom modeli linárnou funkciou okamžitej úrokovej miery.

   (f) PSOR metóda slúži na riešenie sústavy lineárnych rovníc.

   (g) Uvažujme sústavu rovníc, ktorú riešime pri explicitnej schéme na riešenie rovnice vedenia tepla. Ak v SOR algoritme zvolíme kladnú hodnotu parametra omega, metóda bude určite konvergovať.

   (h) Gama call a put opcie s rovnakými parametrami je rovnaká.

(i) Delta call a put opcie s rovnakými parametrami má rovnakú absolútnu hodnotu, líšia sa len znamienkom.

(j) Delta put opcie je rastúcou funkciou ceny akcie.

(k) Úroková miera s 10 ročnou maturitou, ktorá bude na trhu o pol roka, má vo Vašíčkovom modeli normálne rozdelenie.

(l) Úroková miera s 10 ročnou maturitou, ktorá bude na trhu o pol roka, má v CIR modeli normálne rozdelenie.

(m) Ak je úroková miera záporná, Black-Scholesova PDR sa na oceňovanie derivátov nedá použiť.

(n) Black-Scholesove vzorce pre cenu call a put opcie platia aj v prípade, že úroková miera sa riadi Vašíčkovým modelom - dosadzuje sa aktuálna hodnota úrokovej miery v čase, v ktorom sa opcia oceňuje.

(o) Ak akcia nevypláca dividendy, cena americkej put opcie je rovnaká ako cena európskej opcie s rovnakými parametrami.

(p) Ak akcia vypláca dividendy, cena americkej put opcie je rovnaká ako cena európskej opcie s rovnakými parametrami.

2 Kostra predmetu

Prvá otázka na ústnej skúške je z nasledujúceho zoznamu, ktorý je zostavený len zo sylabu štátnic. Jej zodpovedanie je nutnou podmienkou úspešného absolvovania skúšky. Pod tým sa okrem jej vypracovania počas prípravy rozumie aj schopnosť reagovať na doplňujúce otázky na ústnej skúške, vysvetliť napísané výpočty a tvrdenia, doplniť prípravu, ak v nej zostane niečo nezodpovedané. Nestačí naučiť sa niečo naspamäť a nevedieť to zdôvodniť. Takisto nie je možné vynechať časť otázky.

- Black-Scholesov a Mertonov model - odvodenie PDR pre cenu európskeho derivátu postupom Blacka a Scholesa.
- Black-Scholesov a Mertonov model - odvodenie PDR pre cenu európskeho derivátu postupom Mertona.
- Postup riešenia PDR pre cenu derivátu (bude zadaná, netreba si ju pamätať) transformáciou na RVT.
- Citlivosť ceny call a put opcie na parametre (vzorec pre cenu bude zadaný).
- Americké deriváty a ich oceňovanie - úloha s voľnou hranicou, transformácia na úlohu lineárnej komplementarity (zadaná bude klasická Black-Scholesova rovnica).
- Americké deriváty - numerické riešenie PSOR metódou (zadaná bude riešená úloha a predpis Gauss-Seidelovej metódy pre sústavu rovníc).

- Short rate modely úrokových mier - stochastická diferenciálna rovnica pre okamžitú úrokovú mieru, základné modely a ich pravdepodobnostné vlastnosti.
- Short rate modely úrokových mier -odvodenie PDR pre cenu dlhopisu

3 Vzorová ústna časť

Inštrukcie:

- Čas na prípravu: 30 minút
- Čas na odpoveď: cca 20 minút (spolu s opravovaním písomky je na ústnu časť 30 minút)
- Bez použitia poznámok, kalkulačky, notebookov, mobilu a pod. Ťahák z písomnej časti tu nie je povolený.
- Prvá otázka je z kostry, ostatné sú stručné otázky so spoločnou témou nevyžadujúce si dlhé výpočty. Ak bude potrebná Black-Scholesova rovnica, jej riešenie a pod., budú napísané, netreba sa ich učiť naspamäť.

Zadanie:

1. **(10 bodov)** Black-Scholesov a Mertonov model - odvodenie PDR pre cenu európskeho derivátu postupom Blacka a Scholesa.
2. **(10 bodov)**
   - Ukážte, že ak ide volatilita do nekonečna, cena call opcie konverguje k cene akcie. Vieme, že
   $$V(S,\tau) = SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2),$$
   $$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$
   - Vysvetlite, prečo cena opcie na nemôže prekročiť cenu akcie ani v prípade, že sme neuvažovali Black-Scholesov model, ale ľubovoľný náhodný proces pre cenu akcie.
   - Uvažujme derivát, ktorý vyplatí 100 USD, ak bude v čase exspirácie cena akcie v intervale $(100, 120)$. Bez konkrétneho výpočtu, len na základe interpretácie, načrtnite priebeh vegy takéhoto derivátu ako funkcie ceny akcie (teda kedy je pre nás vyššia volatilita výhodná a kedy nie je, kedy je táto výhodnosť/nevýhodnosť výrazná a kedy je malá). Zdôvodnite nakreslený priebeh.
   - Ako sa predchádzajúci priebeh zmení, ak sa priblíži čas exspirácie opcie?