I. Opcie, opčné stratégie, ohraničenia na ich ceny
II. Stochastický kalkulus

Beáta Stehlíková, FMFI UK v Bratislave

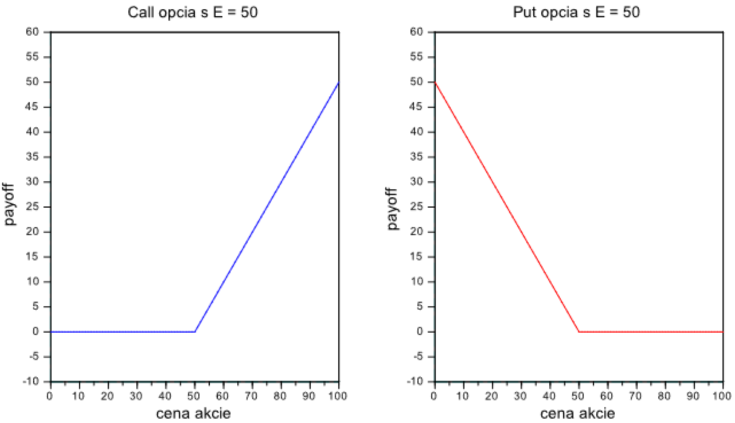
Finančné deriváty

Call a put opcia

- **Európska call opcia** je právo - ale nie povinnosť - kúpit'akciu za dohodnutú cenu E (exspiračná cena, strike price, exercise price) v dohodnutom čase T (expiration time)
- **Európska call opcia** je právo - ale nie povinnosť - predat'akciu za dohodnutú cenu E (exspiračná cena, strike price, exercise price) v dohodnutom čase T (expiration time)
- **Americká opcia** uvedené právo môžeme využiť nielen v čase T, ale hocikedy do tohto času

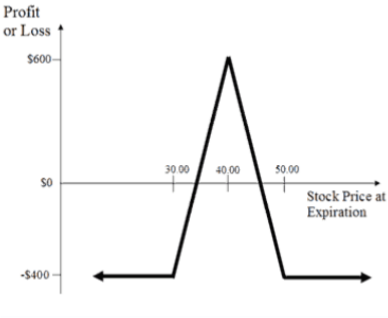
Payoff

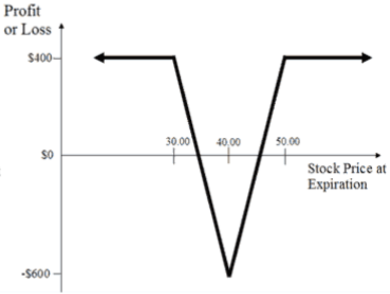
- **Payoff** $=$ výplata v čase exspirácie
- Payoff call opcie: $\max(0, S - E)$
- Payoff put opcie: $\max(0, E - S)$



Kombinované stratégie

- Pri akom očakávaní o vývoji ceny akcie by sme chceli použiť stratégie s nasledovnými payoffmi (zo stránky www.theoptionsguide.com)?
- **DÚ:** Akou kombináciou call a put opcií dosiahneme nasledovné payoffy? *(podobné zadania na cvičení)*





Put-call parita

- Uvažujme kombinovanú stratégiu: kúpime akciu a put s exspiračnou cenou E s exspiráciou v čase T a vypíšeme call s rovnakými E a T
- Bez ohľadu na vývoj ceny akcie bude v čase T hodnota portfólia E
- Z toho vyplýva put-call parita:

$$S + (\text{cena putu}) \text{ - } (\text{cena callu}) = Ee^{-r(T-t)}$$

DÚ: Predpokladajme, že úroková miera je nulová. Call aj put opcia s exspiračnou cenou 10 USD stojí 5 USD. Nájdite arbitráž, ak je dnešná cena akcie rovná 8 USD.

DÚ: Upravte put-call paritu pre prípad, že akcia vypláca spojité dividendy.

Príklad: Chooser opcia

Pravidlá:

- payoff v čase exspirácie T bude payoff call alebo put opcie s exspiračnou cenou E
- o tom, či pôjde o call alebo put opciu, rozhodne držiteľ opcie v čase $T_c < T$
- opcia sa predáva v čase $t < T_c$

Ukážeme, že *chooser* opcia je ekvivalentná portfóliu call a put opcií (a teda ak budeme vedieť oceňovať call a put opcie, budeme vedieť oceniť aj túto)

- Označenie: $\mathrm{call}(E, T; t)$ - cena call opcie s exspiračnou cenou E a exspiráciou v čase T, pričom aktuálny čas je t
- V čase T_c máme

$$\mathrm{chooser}(Tc) = \max(\mathrm{call}(E, T; Tc), \mathrm{put}(E, T; Tc))$$

- Ak akcia nevypláca dividendy, tak z put-call parity dostaneme

$$\mathrm{chooser}(Tc) = \mathrm{call}(E, T; Tc) + \max(0, Ee^{-r(T-T_c)} - S_{T_c})$$

- Vidíme, že druhý člen je payoff putu, čo nám umožní dokončiť výpočet

DÚ: Upravte pre prípad, že akcia vypláca spojité dividendy

Ohraničenia na ceny opcií

- Niektoré ohraničenia nezávisia od modelu pre vývoj ceny akcie
- Základná myšlienka: *Ak má jedno portfólio v čase exspirácie hodnotu menšiu alebo rovnú ako iné portfólio, tak rovnaká nerovnosť musí platiť pre ich hodnoty aj v každom čase pred exspiráciou.*

Literatúra: Kwok: Mathematical Methods of Financial Derivatives, str. 10-16

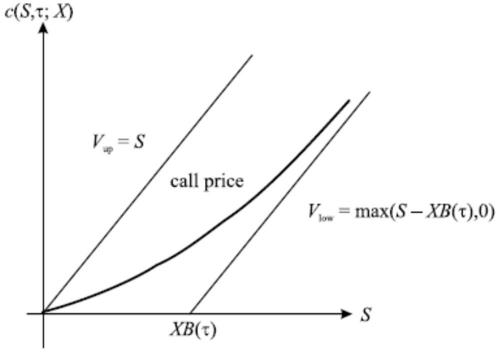
Dostupné zo školskej siete
https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-68688-0

DÚ: Ukážte, že cena call aj put opcie musí byť konvexná funkcia exspiračnej ceny. Uveďte príklad cien, ktoré túto podmienku nespĺňajú a nájdite arbitráž.

Príklad: $S > \mathrm{call}(S, X, \tau) > \max(0, S - Xe^{-r\tau})$

Table 1.1. Payoffs at expiry of Portfolios A and B

Asset value at expiry	$S_T < X$	$S_T \geq X$
Portfolio A	X	$(S_T - X) + X = S_T$
Portfolio B	S_T	S_T
Result of comparison	$V_A > V_B$	$V_A = V_B$



Stochastický kalkulus: opakovanie

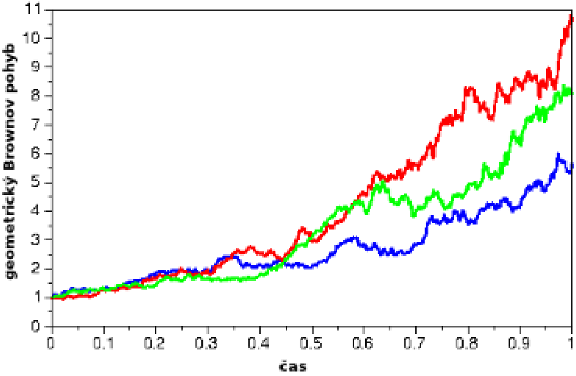
- Definujte Wienerov proces.
- Odvoďte pravdepodobnostné rozdelenie procesu v čase t.
- Odvoďte kovarianciu hodnoty procesu v čase t a v čase $s > t$.
- Sformulujte Itóovu lemu a použite ju na výpočet diferenciálu procesu $x_t = e^{y_t + t}$, kde $dy = 3ydt + 2dw$

Poznámka k disperzii Wienerovho procesu

- Ukážeme, že ak sa disperzia prírastkov v definícii zmení z Δt na $(\Delta t)^2$ a ostatné vlastnosti ponecháme, tak sa dostaneme k sporu. Takýto proces teda neexistuje.
- Ukážeme, že ak sa disperzia prírastkov v definícii zmení z Δt na $f(\Delta t)$ a ostatné vlastnosti ponecháme, tak funkcia f musí spĺňať $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$
- **DÚ**: Dokážte, že ak od funkcie f navyše požadujeme spojitosť alebo monotónnosť, tak jediná vyhovujúca funkcia je $f(x) = cx$, kde c je konštanta.

Geometrický Brownov pohyb

- Definícia:
$$x_t = x_0 e^{\mu t + \sigma w_t},$$
kde $\mu \in (-\infty, \infty)$ a $\sigma \in (0, \infty)$ sú konštanty
- V Black-Scholesovom modeli to bude model pre cenu akcie



Stredná hodnota $x_t = x_0 e^{\mu t + \sigma w_t}$

- **Postup 1:** Vieme, že $\mu t + \sigma w_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$, teda

$$\mathbb{E}(x_t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0 e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx = \cdots$$

- **Postup 2:** Odvodíme distribučnú funkciu x_t, zderivovaním dostaneme hustotu $f(x)$, potom

$$\mathbb{E}(x_t) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \cdots$$

- **Postup 3:** Ukážeme si postup pomocou Itóovej lemy.

DÚ: Spravte výpočty pre postup 1 a postup 2.

- Z Itóovej lemy:

$$dx = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) xdt + \sigma x dw$$

- Pre strednú hodnotu dostaneme:

$$d\mathbb{E}(x) = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \mathbb{E}(x)dt,$$

  to je ODR pre $g(t) = \mathbb{E}(x_t)$
- Spolu s $g(0) = x_0$ dostaneme

$$E(x_t) = x_0 e^{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$$

DÚ: Nájdite explicitný predpis pre x, ak $dx = \mu x dt + \sigma x dw$ a strednú hodnotu tohto procesu. Je to tiež GBP a v tomto tvare sa obvykle používa v modeloch pre oceňovanie finančných derivátov.