

Spojité náhodné vektory II.

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
Beáta Stehlíková, FMFI UK

Opakovanie

NA'HODNA' PREMENNA' X

hustota $f(x)$

$$\textcircled{1} \quad P(X \in (a, b)) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\textcircled{2} \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

$$\text{napr. } E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) dx$$

NA'HODNÝ VEKTOR (X, Y)

$f(x, y)$

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

$$\text{napr. } E(X^2 + Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) f(x, y) dx dy$$

Príklad 1: Životnosť komponentov

- Životnosť dvoch komponentov prístroja v mesiacoch má združenú hustotu

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{125,000}(50 - x - y) & \text{for } 0 < x < 50 - y < 50, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Aká je pravdepodobnosť, že po 20 mesiacoch ešte obidva komponenty fungujú?

(A) $\frac{6}{125,000} \int_0^{20} \int_0^{20} (50 - x - y) dy dx$

(B) $\frac{6}{125,000} \int_{20}^{30} \int_{20}^{50-x} (50 - x - y) dy dx$

(C) $\frac{6}{125,000} \int_{20}^{30} \int_{20}^{50-x-y} (50 - x - y) dy dx$

(D) $\frac{6}{125,000} \int_{20}^{50} \int_{20}^{50-x} (50 - x - y) dy dx$

(E) $\frac{6}{125,000} \int_{20}^{50} \int_{20}^{50-x-y} (50 - x - y) dy dx$

Príklad 2: Ponuky poisťovní

- Dve poisťovne dávajú ponuky firme na určité poistenie
- Výšky poisťného, ktoré navrhnú, sú nezávislé a majú rovnomerné rozdelenie na intervale (2000, 2200).
- Ak je niektorá ponuka nižšia od druhej aspoň o 20, firme príjme túto ponuku.
- Ak je rozdiel menší ako 20, bude sa podrobnejšie zaoberať obidvoma ponukami.
- Aká je pravdepodobnosť tejto druhej možnosti?

Možnosti: (A) 0.10 (B) 0.19 (C) 0.20 (D) 0.41 (E) 0.60

Príklad 3: Spoluúčast' I.

- Rodina kúpila dve poistky na dve udalosti, jedna má spoluúčast' 1 a druhá 2.
- Škody pri oboch udalostiach majú rovnomerné rozdelenie medzi 0 a 10.
- Predpokladajme, že v oboch prípadoch nastala práve jedna poistná udalosť.
- Aká je pravdepodobnosť, že platba, ktorú rodina spolu od poisťovne dostala, je menšia ako 5?

Možnosti: (A) 0.13 (B) 0.25 (C) 0.30 (D) 0.32 (E) 0.42

Príklad 4: *Basic* a *Deluxe* poistenie

- Poistovňa predáva dva typy poistenia auta – *Basic* a *Deluxe*
- Čas do najbližšej poistnej udalosti hlásenej majiteľom poistenia *Basic* má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 2 dni.
- Čas do najbližšej poistnej udalosti hlásenej majiteľom poistenia *Deluxe* má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 3 dni.
- Aká je pravdepodobnosť, že najbližšia poistná udalosť bude hlásená od vlastníka poistenia *Deluxe*?

Možnosti: (A) 0.172 (B) 0.223 (C) 0.400 (D) 0.487 (E) 0.500

Príklad 5: Spoluúčasť II.

- Rodina kúpila dve poistky na dve udalosti
- Škody pri týchto udalostiach majú združenú hustotu
$$f(x, y) = 2x \text{ pre } 0 < x < 1, 0 < y < 1$$
(inak je hustota nulová)
- Predpokladajme, že v oboch prípadoch nastala práve jedna poistná udalosť.
- Aká je stredná hodnota platby, ktorú rodina spolu od poisťovne dostala, ak je spoluúčasť rovná 1?

Možnosti: (A) 1/4 (B) 1/3 (C) 1/2 (D) 7/12 (E) 5/6

Príklad 6: Najvyššia škoda

- Škoda na dome spôsobená vetrom v tisícoch je náhodná premenná s hustotou $3x^{-4}$ pre x väčšie ako 1 (inde je nulová)
- Škody na jednotlivých domoch sú nezávislé.
- Boli hlásené tri poistné udalosti.
- Aká je stredná hodnota najvyššej škody?

Možnosti: (A) 2025 (B) 2700 (C) 3232 (D) 3375 (E) 4500