Súčty nezávislých náhodných premenných I.

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
Beáta Stehlíková, FMFI UK

Príklad 1: Poistenie auta

- Výška škody pri dopravnej nehode má normálne rozdenie so so strednou hodnotou 19 400 a štandardnou odchýlkou 5000.
- Škody v jednotlivých nehodách sú nezávislé.
- Vyberieme náhodne 25 nehôd.
- Aká je pravdepodobnosť, že priemerná škoda bude vyššia ako 20 000?

Možnosti: (A) 0.01 (B) 0.15 (C) 0.27 (D) 0.33 (E) 0.45

Výpočty s normálnym rozdelením

- Na skúške *Society of Actuaries* sa pracuje s tabuľkami normalizovaného normálneho rozdelenia:

Entries represent the area under the standardized normal distribution from -∞ to z, Pr(Z<z)
The value of z to the first decimal is given in the left column. The second decimal place is given in the top row.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517

https://www.soa.org/globalassets/assets/files/edu/P-05-05tables.pdf

- Pre nás to bude znamenať, že výsledok vyjadríme pomocou normalizovaného normálneho rozdelenia (a potom použijeme softvér)

Výpočty s normálnym rozdelením

- R-ko: **`pnorm`** (distribučná funkcia), **`qnorm`** (inverzná funkcia k distribučnej, teda kvantilová funkcia)
- Matlab: **`normcdf`** (distribučná funkcia), **`norminv`** (inverzná funkcia k distribučnej)

```
> pnorm(0)
[1] 0.5
> pnorm(1)
[1] 0.8413447
> qnorm(0.95)
[1] 1.644854
> qnorm(0.975)
[1] 1.959964
```

```
octave:2> normcdf(0)
ans = 0.5000
octave:3> normcdf(1)
ans = 0.8413
octave:4> norminv(0.95)
ans = 1.6449
octave:5> norminv(0.975)
ans = 1.9600
```

- *Poznámka:* Výpočet vpravo je v Octave na stránke https://octave-online.net/, najskôr sa načítal potrebný balík príkazom **`pkg load nan`**

Príklad 2: Žiarovky

- Životnosť žiarovky v mesiacoch má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 3 a štandardnou odchýlkou 1.
- Životnosti sú nezávislé.
- Zákazník kúpi určitý počet žiaroviek, ktoré bude postupne vymieňať.
- Koľko najmenej ich musí kúpiť, aby pravdepodobnosť, že mu vydržia aspoň 40 mesiacov bola aspoň 0,9772?

  Možnosti: (A) 14 (B) 16 (C) 20 (D) 40 (E) 55

Príklad 3: Výška veže

- Chceme odmerať výšku veže *h*
- Meranie presnejším prístrojom má chybu s normálnym rozdelením s nulovou strednou hodnotou a štandardnou odchýlkou 0,0044 *h*
- Meranie menej presným prístrojom má chybu s normálnym rozdelením s nulovou strednou hodnotou a štandardnou odchýlkou 0,0056 *h*
- Merania sú nezávislé
- Aká je pravdepodobnosť, že priemer meraní bude od skutočnej výšky vzdialený menej ako 0,005 *h?*

Možnosti: (A) 0.38 (B) 0.47 (C) 0.68 (D) 0.84 (E) 0.90

Príklad 4: Čakanie na úspech

- Napríklad:
  - Hádžeme mincou, kým nepadne znak
  - Hádžeme kockou, kým nepadne šestka
- Náhodná premená X označuje počet nezávislých pokusov potrebných na dosiahnutie prvého úspechu – má tzv. *geometrické rozdenie*
- Nech pravdepodobnosť úspechu v jednom pokuse je p. Vysvetlite, prečo je pre m = 1, 2, … pravdepodobnosť toho, že X = m rovná $p\,(1 – p)^{m-1}$

Príklad 4: Čakanie na úspech

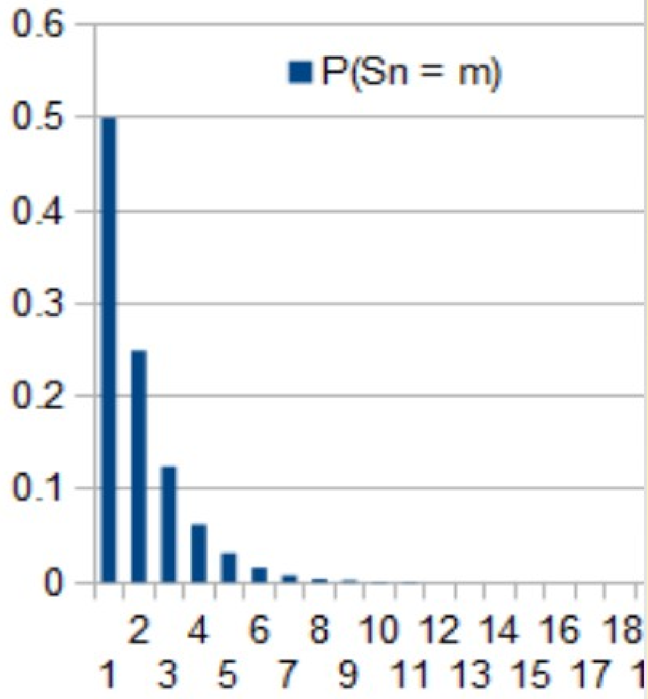
- Uvažujme **súčet *n* nezávislých náhodných premenných s týmto rozdelením**
- Dá sa interpretovať ako počet pokusov potrebných na dosiahnutie *n*-tého úspechu
- Kombinatorickou úvahou odvoďte, prečo je pravdepodobnosť toho, že sa tento súčet rovná *m*

$$\binom{m-1}{n-1} p^n (1-p)^{m-n} \qquad m = n, n+1, n+2, \ldots$$

Príklad 4: Čakanie na úspech

- Príklad: hádzanie mincou, chceme hodiť znak, teda $p = ½$
- Najskôr $n = 1$ (geometrické rozdelenie)

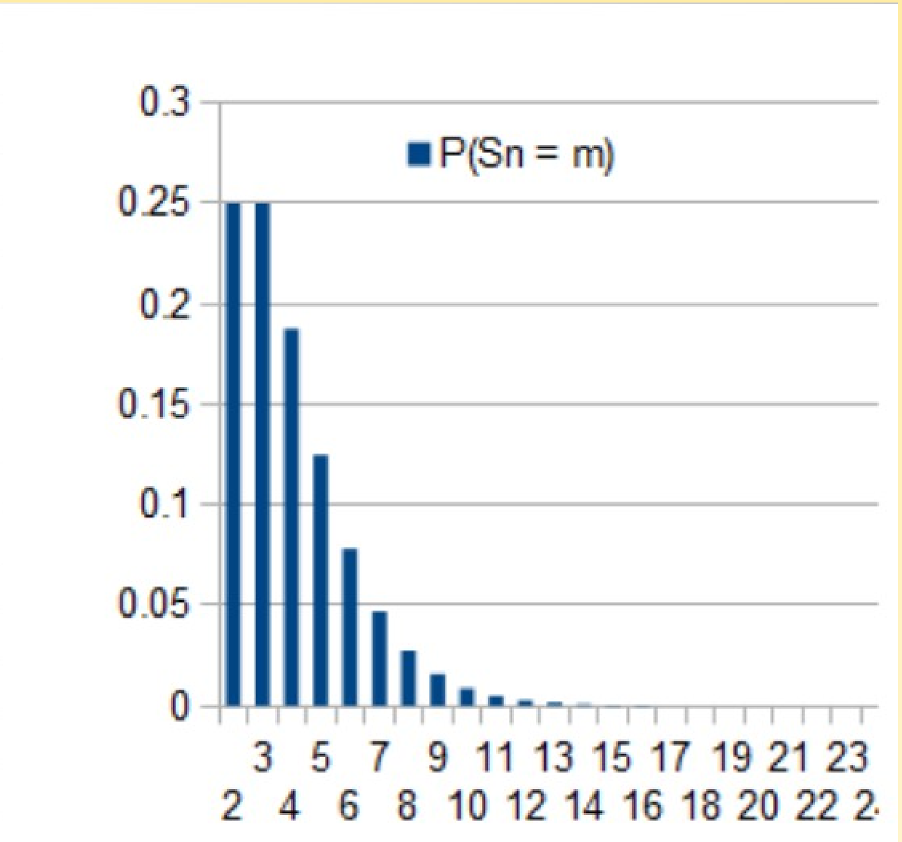
n	1
m	**P(Sn = m)**
1	0.5
2	0.25
3	0.125
4	0.0625
5	0.03125
6	0.015625
7	0.0078125
8	0.00390625
9	0.001953125
10	0.000976563
11	0.000488281
12	0.000244141
13	0.00012207
14	6.1035E-005



Príklad 4: Čakanie na úspech

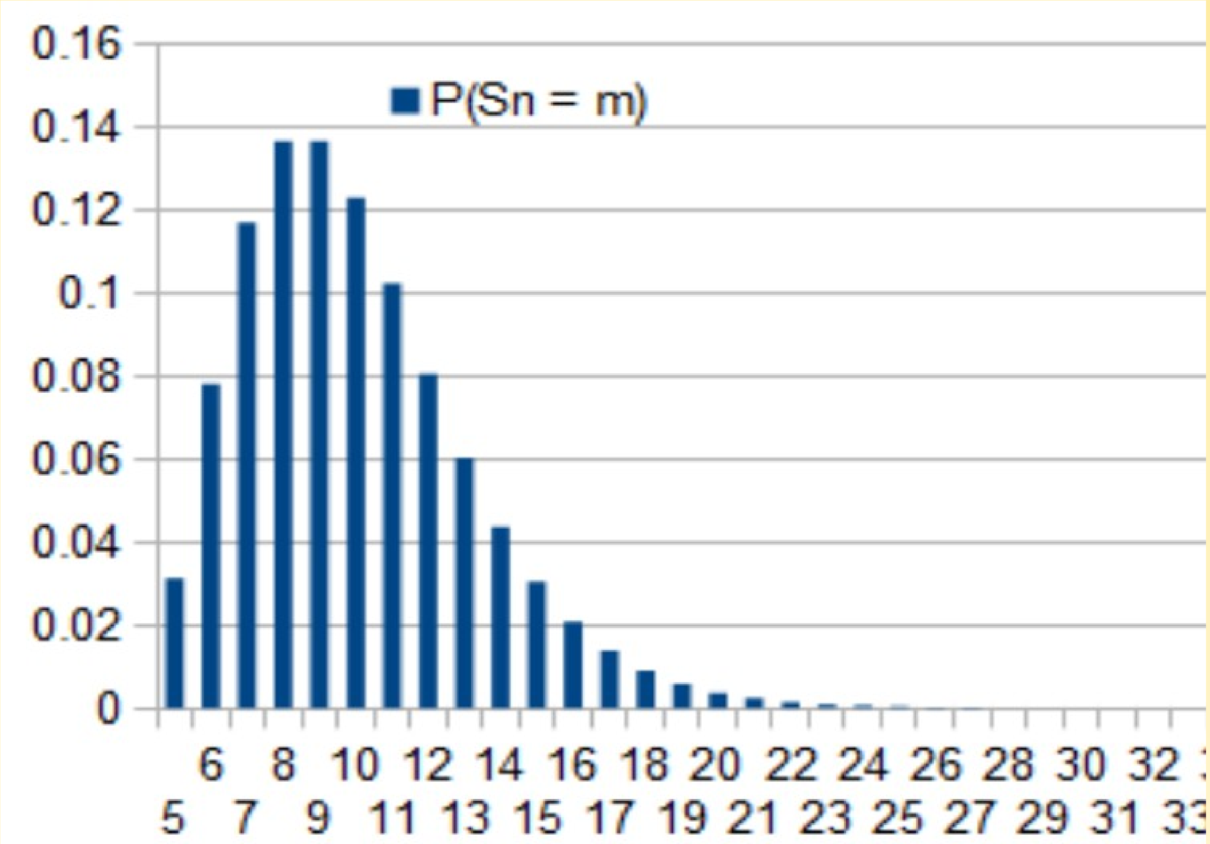
- Čakanie na druhý úspech, *n = 2*

n	2
m	P(Sn = m)
2	0.25
3	0.25
4	0.1875
5	0.125
6	0.078125
7	0.046875
8	0.02734375
9	0.015625
10	0.008789063
11	0.004882813
12	0.002685547
13	0.001464844
14	0.000793457
15	0.000427246



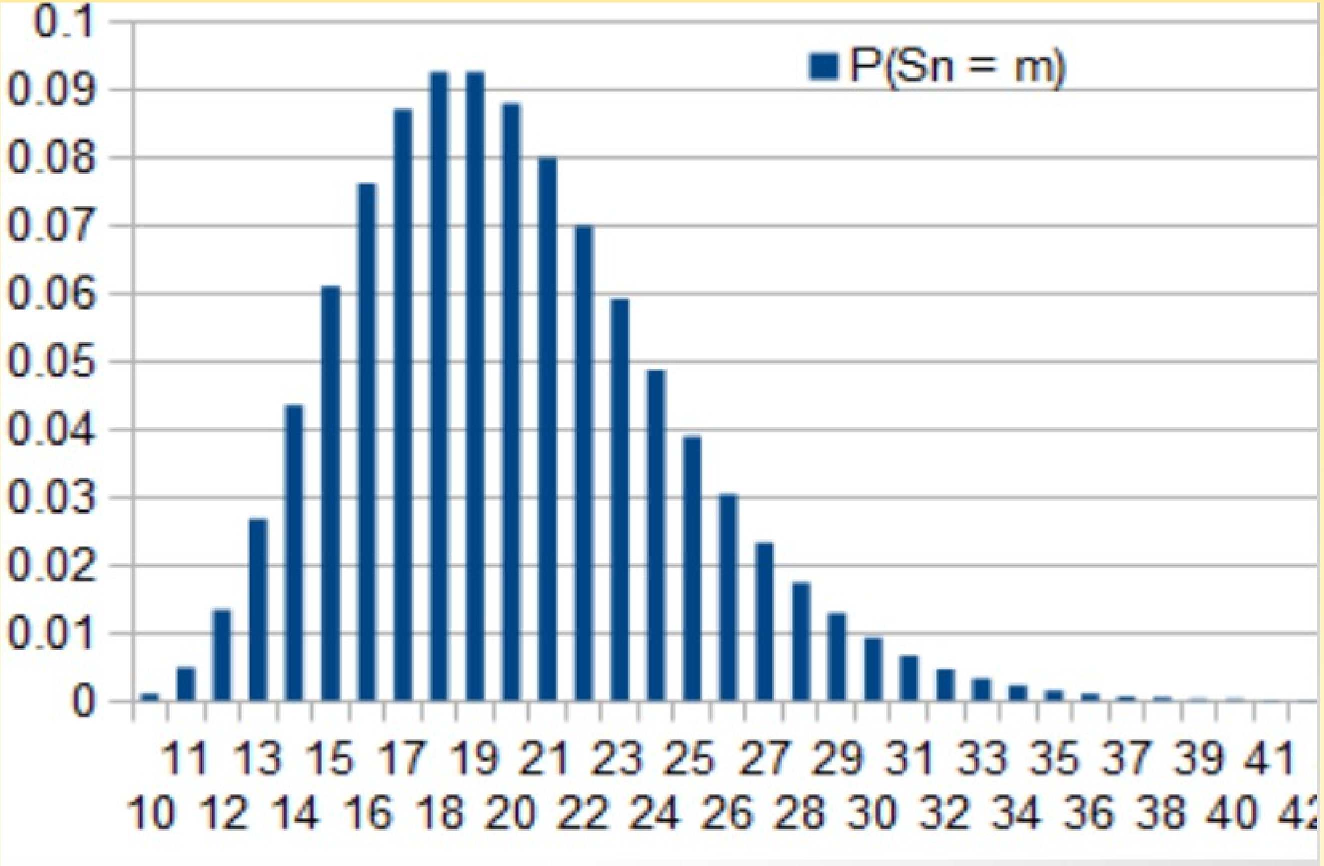
Príklad 4: Čakanie na úspech

- Čakanie na piaty úspech, *n = 5*



Príklad 4: Čakanie na úspech

- Čakanie na desiaty úspech, n = 10



Príklad 4: Čakanie na úspech

- Čakanie na dvadsiaty úspech, $n = 20$