Súčty nezávislých náhodných premenných II.

(centrálna limitná veta)

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Beáta Stehlíková, FMFI UK

Centrálna limitná veta

$\to X_i$ - nezávislé náh. prem., rovnaké rozdelenie, $E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2$

$\sum_{i=1}^{n} X_i \to E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{1}^{n} \overbrace{E(X_i)}^{\mu} = n\mu$

$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\text{nez.}}{=} \sum \underbrace{D(X_i)}_{\sigma^2} = n\sigma^2$

$$\boxed{Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}$$

$\to E(Y_n) = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}\left(\underbrace{E(\sum X_i)}_{n\mu} - n\mu\right) = 0$

$D(Y_n) = \frac{1}{n\sigma^2} D(\sum X_i - \underbrace{n\mu}_{\text{konšt.}}) = \frac{1}{n\sigma^2} \underbrace{D(\sum X_i)}_{n\sigma^2} = 1$

$D(aY) = a^2 D(Y)$

$Y_n \to N(0,1)$

pre veľké n:

$Y_n \overset{\text{aprox.}}{\sim} N(0,1)$

$\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{\text{ap.}}{\sim} N(0,1)$

$$\boxed{\sum X_i \overset{\text{ap.}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)}$$

$\boxed{\text{CLV:}}$ F_n - distr. f. Y_n

$F_n(z) \to \phi(z)$, $n \to \infty$

ϕ - distr. f. $N(0,1)$

Príklad 1: Filmy a šport

- X = koľko hodín mesačne človek pozerá filmy, Y = koľko hodín pozerá športové prenosy
- Nezávislé pre jednotlivých ľudí
- Dané: $E(X) = 50$, $E(Y) = 20$, $D(X) = 50$, $D(Y) = 30$, $cov(X, Y) = 10$
- 100 ľudí, T = celkový počet hodín pozerania filmov a športu
- Aproximujete $P(T < 7100)$.

Možnosti: (A) 0.62 (B) 0.84 (C) 0.87 (D) 0.92 (E) 0.97

Príklad 2: Vek poistencov

- Vek poistencov sa uvádza zaokrúhlený na najbližší násobok 5 (napr. 22 ako 20, 23 ako 25 atď.)
- Rozdiely medzi skutočným vekom a zaokrúhleným:
  - Nezávislé pri jednotlivých poistencoch
  - Rovnomerné rozdelenie na [-2.5, 2.5]
- Zo 48 náhodne vybraných dát sa vypočíta priemerný vek
- Aká je pravdepodobnosť, že sa od skutočného priemeru líši o menej ako 0.25 roku?

  Možnosti: (A) 0.14 (B) 0.38 (C) 0.57 (D) 0.77 (E) 0.88

Príklad 3: Príjmy poisťovne

- Poistné plnenia pre určité zdravotné poistenie sú nezávislé s exponenciálnym rozdelením so strednou hodnotou 1000.
- Výška poistného je o 100 vyššia ako očakávaná hodnota poistného plnenia.
- Uzavretých bolo 100 poistení.
- Aká je pravdepodobnosť, že výdavky poisťovne budú vyššie ako príjmy?

  Možnosti: (A) 0.001 (B) 0.159 (C) 0.333 (D) 0.407 (E) 0.460

Príklad 4: Policajtky

- Polícia prijala 100 policajtiek.
- Tým, ktoré zostanú v polícii až do dôchodku, mesto vyplatí určitú sumu.
- Ak budú v čase odchodu do dôchodku vydaté, takú istú sumu dostane aj manžel.
- Predpokladáme, že je známe:
  - Pp. toho, že policajtka zostane na polícii do dôchodku, je 0.4
  - Za predpokladu, že dostane do dôchodku, pp. toho, že v tom čase nebude vydatá, je 0.25
  - Nezávislosť obidvoch veličín (zostane do dôchodku, bude vydatá) pre jednotlivé policajtky

Príklad 4: Policajtky

- Zaujíma nás počet výplat dohodnutej sumy (policajtkám a ich manželom)
- Aká je pravdepodobnosť, že ich nebude viac ako 90?

Možnosti: (A) 0.60 (B) 0.67 (C) 0.75 (D) 0.93 (E) 0.99