

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Domáca úloha 3

Odvzdávanie:

- Mailom na adresu beata.ulohy@gmail.com s predmetom **metódy 2021 – DU3 – priezvisko**. Formát predmetu aj mail je potrebné dodržať, maily sa podľa predmetu automaticky triedia.
- Posielajte buď pdf alebo odfotené riešenia ako obrázky.
- Termín odovzdania: **streda 10. 3. 2021** (teda poľnoc zo stredy na štvrtok)

Ďalšie poznámky:

- Pri riešení domácich úloh môžete v primeranej miere spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi.
- “Plný počet” bodov za domácu úlohu je 60 – teda 3 príklady. Môžete však získať aj viac ako 60 bodov, do výpočtu priemeru aj do súťaže o hodnotenie A bez písomky sa počítajú všetky získané body.

Príklad 1 (20 bodov). Vrátime sa k príkladu o hlasovaní komisie z cvičenia, konkrétne k tej časti, kde sme zisťovali, čo má horší efekt na pravdepodobnosť správneho rozhodnutia komisie – či rozhodovanie na základe hádzania mincou alebo odpísanie hlasovania od šikovnejšieho kolegu. Pre dané pravdepodobnosti správneho rozhodnutia členov komisie nám vyšlo, že odpisovanie viedlo k horšiemu výsledku. Nájdite všetky kombinácie pravdepodobností p_1 a p_2 , pre ktoré to výjde naopak, teda pre ktoré viac zhorší výsledok hádzanie mincou ako odpisovanie.

Príklad 2 (20 bodov). Zmeňme príklad 2 o nezávislých zložkách náhodného vektora tak, že namiesto hodnôt $2/9$ napíšeme inú (v oboch prípadoch rovnakú) pravdepodobnosť.

• Doplňte pravdepodobnostné rozdelenie náhodného vektora tak, aby mal nezávislé zložky:

		Y	
		0	1
X	0	$\frac{2}{9}$	
	1		$\frac{2}{9}$

Je zrejmé, že táto pravdepodobnosť nemôže byť väčšia ako $\frac{1}{2}$, lebo v takom prípade nemôže ísť o pravdepodobnostné rozdelenie. Určte všetky hodnoty tejto pravdepodobnosti, ktoré sú z intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, ale po tejto modifikácii nemá úloha riešenie (to znamená, že sa nedá doplniť rozdelenia náhodného vektora tak, aby jeho zložky boli nezávislé).

Príklad 3 (20 bodov). Hádzeme N kockami a zapisujeme si počet padnutých jednotiek a šestiek ako realizácie náhodného vektora (X, Y) . Aká hodnota, respektíve aké hodnoty (môže ich byť viac) tohto náhodného vektora majú najväčšiu pravdepodobnosť, ak

- $N = 5$,
- $N = 15$?

V druhom prípade treba určite napísať počítačový skript ;) ktorý samozrejme môžete použiť aj pre prvú časť.

Príklad 4 (20 bodov). Na začiatku máme jedno euro. Potom stokrát hádzeme mincou. Zakaždým, keď na minci padne hlava, sa stav nášho konta zdvojnásobí. Vždy, keď padne znak, klesne stav nášho konta na polovicu. Aká je stredná hodnota stavu nášho konta na konci?

Príklad 5 (20 bodov). Na začiatku máme jedno euro. Potom stokrát hádzeme súčasne kockou a mincou. Zakaždým, keď na minci padne hlava, sa stav nášho konta vynásobí hodnotou, ktorá padla na kocke. Vždy, keď padne znak, stav nášho konta sa vydolí hodnotou, ktorá padla na kocke. Teda ak napríklad padne na kocke trojka a na minci znak, stav nášho konta klesne na tretinu svojej aktuálnej hodnoty. Aká je stredná hodnota stavu nášho konta na konci?

Príklad 6 (20 bodov). K výpočtu príkladu na cvičení sme nasledujúcu pravdepodobnosť nepotrebovali, ale vypočítať sa dá, tak to spravme: Adam a Boris hádžu mincami. Každý z nich hodí N mincami. Aká je pravdepodobnosť, že obom padol rovnaký počet hláv? Výsledok vyjadrite v tvare, ktorý neobsahuje sumu.