

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
Domáca úloha 6

Odvzdávanie:

- Mailom na adresu beata.ulohy@gmail.com s predmetom **metódy 2021 – DU6 – priezvisko**. Formát predmetu aj mail je potrebné dodržať, maily sa podľa predmetu automaticky triedia.
- Posielajte buď pdf alebo odfotené riešenia ako obrázky.
- Termín odovzdania: **streda 31. 3. 2021** (teda poľnoc zo stredy na štvrtok)

Ďalšie poznámky – rovnako ako v predchádzajúcich úlohách.

Poznámky:

- Príklady 1 - 2 boli v predchádzajúcej domácej úlohe dané na robenie simulácií.
- Integrály, ktoré vzniknú pri riešení, treba vypočítať (nestačí použiť napríklad WolframAlpha a pod. - to môže byť len kontrola)

Príklad 1 (20 bodov). Straty X a Y sú nezávislé náhodné premenné, pričom každá z nich má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 1. Poistenie preplatí celkovú stratu $X + Y$. Aká je pravdepodobnosť, že to bude menej ako 1?

Možnosti: (A) $\exp(-2)$ (B) $\exp(-1)$ (C) $1 - \exp(-1)$ (D) $1 - 2 \exp(-1)$ (E) $1 - 2 \exp(-2)$

Príklad 2 (20 bodov). Predpokladajme, že zostávajúce dĺžky života manžela a manželky sú nezávislé náhodné premenné s rovnomerným rozdelením na intervale $(0, 40)$. Poistovňa ponúka produkt, ktorý má dve platby: prvá sa pozostalým vyplátí pri smrti manžela a druhá pri smrti druhého zomrelého (teda v čase, keď sú obidvaja mŕtvi). Aká je kovariancia časov, v ktorých budú tieto platby realizované?

Možnosti: (A) 0.0 (B) 44.4 (C) 66.7 (D) 200.0 (E) 446.7

Príklad 3 (20 bodov). Prístroj sa skladá z dvoch častí. Ak sa niektorá z nich pokazí, prístroj prestane fungovať. Združená hustota životnosti jednotlivých častí v hodinách je $f(s, t)$, pričom je nenulová pre s, t z intervalu $(0, 1)$. Aká je pravdepodobnosť, že prístroj prestane fungovať počas prvej polhodiny?

Možnosti:

(A) $\int_0^{0.5} \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$

(B) $\int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$

(C) $\int_{0.5}^1 \int_{0.5}^1 f(s, t) ds dt$

(D) $\int_0^{0.5} \int_0^1 f(s, t) ds dt + \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$

(E) $\int_0^{0.5} \int_{0.5}^1 f(s, t) ds dt + \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$

Príklad 4 (20 bodov). Prístroj obsahuje dva obvody. Druhý z nich je záložný, takže sa začne používať až potom, čo prvý obvod zlyhá. Prístroj sa pokazí, keď zlyhá druhý, záložný obvod (teda keď už nefunguje ani jeden z nich). Nech X, Y sú časy zlyhania prvého, resp. druhého obvodu. Hustota náhodného vektora (X, Y) sa rovná $6 e^{-x} e^{-2y}$ pre $0 < x < y$ a inak je nulová, Vypočítajte strednú hodnotu času, v ktorom sa prístroj pokazí.

Možnosti: (A) 0.33 (B) 0.50 (C) 0.67 (D) 0.83 (E) 1.50

Príklad 5 (20 bodov). Nech X označuje vek poisteného auta v dopravnej nehode a Y čas, ktorý mal majiteľ auto poistené. Hustota náhodného vektora (X, Y) je nenulová iba na obdĺžniku $2 < x < 10, 0 < y < 1$, kde sa rovná $(10 - xy^2)/64$. Inde je nulová. Vypočítajte strednú hodnotu veku poisteného auta v dopravnej nehode.

Možnosti: (A) 4.9 (B) 5.2 (C) 5.8 (D) 6.0 (E) 6.4



https://www.freepik.com/free-photo/road-accident-with-smashed-cars_11135369.htm

Príklad 6: Najvyššia škoda

- Škoda na dome spôsobená vetrom v tisícoch je náhodná premenná s hustotou $3x^{-4}$ pre x väčšie ako 1 (inde je nulová)
- Škody na jednotlivých domoch sú nezávislé.
- Boli hlásené tri poistné udalosti.
- Aká je stredná hodnota najvyššej škody?

Možnosti: (A) 2025 (B) 2700 (C) 3232 (D) 33

Príklad 6 (20 bodov). Na cvičení sme pri tomto príklade uviedli výpočet nasledovný integrál ako prvý možný postup výpočtu (a potom sme podrobne vypočítali strednú hodnotu iným postupom):

$$\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \underbrace{\max(x, y, z)}_{=x \quad yz \leq x} \cdot 3^3 x^{-4} y^{-4} z^{-4} dx dy dz$$

Vypočítajte tento integrál (a presvedčte sa, že výjde rovnaký výsledok ako na cvičení).