

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
Domáca úloha 1, termín odovzdania: 3. 3. 2022

Odovzdávanie:

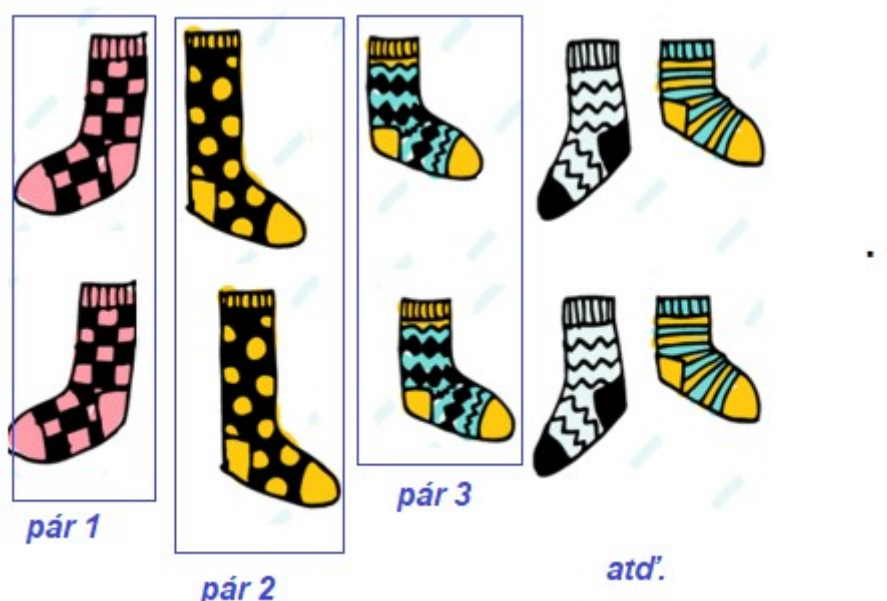
- Osobne na začiatku cvičenia alebo mailom – odoslaným pred začiatkom cvičenia – na adresu beata.ulohy@gmail.com s predmetom (treba ho dodržať, maily sa podľa neho automaticky triedia) **metody 2022 - DU1 – priezvisko**
- V prípade odovzdávania výpočtov mailom: Riešenia spíšte do textového súboru alebo ich odfoťte (dostatočne kvalitne, aby bol text čitateľný) a skonvertujte do pdf formátu.
- V prípade odovzdávania počítačových výpočtov: mailom pošlite kód a zosnímanú obrazovku s výstupmi alebo markdown (kód + výsledky) tak, aby sa dali kontrolovať bez nutnosti spustenia kódu. Výstupy môžu byť aj súčasťou spísaného riešenia.
- Ak odovzdávate časť úlohy mailom a časť osobne, napíšte o tom poznámku do riešenia (napr. text „zvyšok odovzdám osobne“ v maili, resp. poznámka „odkaz na výpočet v google dokumente je v maili“ alebo „kód je v maili“ v odovzdanom riešení)

Ďalšie inštrukcie:

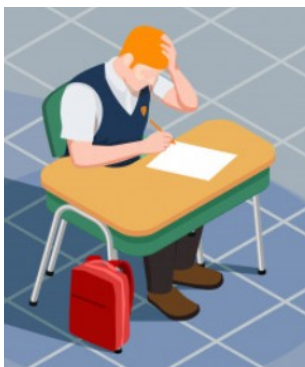
- **Pri riešení domácich úloh môžete v primeranej spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne.** Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi. Ak spoluprácu nebudem považovať za primeranú, zmení sa systém domácich úloh tak, že každý bude riešiť iné zadania.
- Termín odovzdania tejto DÚ: **štvrtok 3. marca 2022** do začiatku cvičenia
- **“Plný počet” bodov za domácu úlohu je 60 – teda 3 príklady**, môžete však získať aj viac ako 60 bodov. Do výpočtu priemeru aj do súťaže o hodnotenie A bez písomky sa počítajú všetky získané body. „Plný počet“ sa chápe v tom zmysle, že „plný počet“ z každej úlohy + bezchybná písomka = 100 bodov.

Príklad 1 (20 bodov)

Vrátime sa k príkladu o ponožkách z cvičenia. Znovu budeme vyberať k ponožiek z n párov. Jednotlivé páry ponožiek očísľujeme:



Definujme teraz náhodnú premennú X_i rovnajúcu sa jednej, ak je medzi vybranými ponožkami i -ty pár (inak sa rovná nule). Vyjadrite počet nájdených párov pomocou X_i a nájdite jeho strednú hodnotu.



Príklad 2 (20 bodov)

Vráťme sa k úlohe o prezidentoch z cvičenia:

A high school student who hadn't opened his American history book in weeks was dismayed to walk into class and be greeted with a pop quiz. It was in the form of two lists, one naming the 24 presidents in office during the 19th century in alphabetical order and another list noting their terms in office, but scrambled. The object was to match the presidents with their terms. The completely clueless student had to guess every time. On average, how many did he guess correctly?

Uvažujme dve stratégie, ktoré študent pri písaní písomky zvažuje:

- Prirad'uje roky tak, že každému menu je priradené práve jedno obdobie a každé takéto priradenie má rovnakú pravdepodobnosť. S touto stratégiou sme robili na cvičení.
 - Prirad'uje roky tak, že každému menu priradí jedno z období, pričom každé obdobie vyberie s rovnakou pravdepodobnosťou a nezávisle od predchádzajúcich odpovedí (môže sa teda stať, že niekoľkým prezidentom bude priradené to isté obdobie v úrade).
- a) **(10 bodov)** Aká je stredná hodnota počtu správnych odpovedí, ak si zvolí druhú stratégiu?
- b) **(10 bodov)** Za každú správnu odpoveď dostane jeden bod. Pri ktorej stratégii mu hrozí s vyššou pravdepodobnosťou, že jeho bodový zisk bude nula bodov?

Príklad 3 (20 bodov)

Vráťme sa k príkladu z cvičenia o hľadaní písomiiek, tentoraz nás bude zaujímať, kde sa nachádza prvá nájdená písomka. Cieľom tohto príkladu je vypočítať strednú hodnotu miesta, na ktorom sa nachádza prvá písomka vo všeobecnom prípade, ak si písomku príde pozrieť m študentov z celkového počtu N . Pre prípad z cvičenia ($N = 20$, $m = 3$) dáva WolframAlpha “podozrivo pekný” výsledok – zlomok $21/4$



sum k * choose(20-k, 2)/choose(20, 3), k from 1 to 18

NATURAL LANGUAGE

MATH INPUT

EXTENDED KEYBOARD

Sum

$$\sum_{k=1}^{18} \frac{k \binom{20-k}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{21}{4}$$

Odvod'te strednú hodnotu miesta, kde sa nachádza prvá nájdená písomka. (Ide o výpočet sumy, intuitívne úvahy o tom, ako by mali byť „v priemere“ rozmiestnené písomky, na plný počet bodov nestačia, za dobre vysvetlenú intuíciu za správnym výsledkom sa však dá získať 5 bodov. Výsledok z Wolframu nestačí.)

Príklad 4 (20 bodov)

Znovu sa budeme zaoberať príkladom o ponožkách z cvičenia, v ktorom vyberáme k ponožiek z n párov. Spravíme **skúšku správnosti pomocou špeciálnych prípadov**. Všimnime si, že prípad $k = 2n$ zodpovedá tomu, že sme postupne vybrali všetky ponožky, a teda sme museli nájsť všetky páry.

- Čomu sa musí v tomto prípade rovnať výsledok výpočtu strednej hodnoty počtu nájdených párov? Overte, že vzťah, ktorý sme odvodili, tomuto vyhovuje.
- Aké musí byť pravdepodobnostné rozdelenie počtu nájdených párov (teda možné hodnoty a ich pravdepodobnosti)? Overte, že vzťah, ktorý sme odvodili, tomuto vyhovuje.

Príklad 5 (20 bodov)

Ešte raz sa budeme zaoberať príkladom o ponožkách, tentoraz **počítačovými simuláciami**. Namiesto výpočtu priemerného počtu nájdených párov (to sme robili v simuláciách na cvičení) sa teraz pozrieme na jednotlivé hodnoty, ktoré nastali a ich početnosti.

- V počítačovej simulácii z cvičenia sme vybrali 7 ponožiek z 5 párov. Pomocou funkcie **table** zistíme, že 2 páry sa našli 6673 krát a 3 páry sa našli 3327 krát:

```
> table(pocty)
pocty
  2    3
6673 3327
```

Vysvetlite, prečo nastávali iba hodnoty 2 a 3 (priamo, nie odvolaním sa na všeobecný vzťah z cvičenia). Vypočítajte podiel prípadov, v ktorých nastali (teda napríklad 0,3 bude znamenať, že v 30 percentách prípadov) a porovnajte ich s pravdepodobnosťami odvodenými na cvičení.

- Zopakujte pre príklad, že vyberáme 10 ponožiek z 10 párov (teda vysvetlenie možných hodnôt, výpočet podielu prípadov v simuláciách a teoretických pravdepodobností).

```
> set.seed(123)
> pocty <- replicate(10^4, vyberaniePonoziek(10, 10))
> table(pocty)
pocty
  0    1    2    3    4    5
43 1236 4423 3638 647  13
```



Príklad 6 (20 bodov)

V triede je 30 žiakov. V decembri, v posledný deň v škole pred prázdninami každý z nich prinesie do školy malý darček. Darčekom sa zabalia do rovnakých krabičiek a na konci vyučovania sa náhodne rozdelia medzi žiakov tejto triedy. Aká je stredná hodnota počtu žiakov, ktorí si domov odnesú vlastný darček?