

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky
Domáca úloha 7, termín odovzdania: 7. 4. 2022

Inštrukcie:

- Termín odovzdania tejto DÚ: štvrtok 7. apríla 2022 do začiatku cvičenia
- "Riešenia posielate mailom: mail beata.ulohy@gmail.com, predmet **metody 2022 – DU7 – priezvisko** – kód v R-ku a odpoveď na otázky buď v maili alebo zakomentované v kóde
- Ostatné inštrukcie sú v prvej domácej úlohe.

Úlohy riešte simuláciami.

Príklad 1 (20 bodov)

Nech (A, B, C, D) je náhodný vektor, ktorého zložky sú nezávislé náhodné premenné s rovnomerným rozdelením na intervale $(0, 1)$. Všimnime si, že body (A, B) a (C, D) sú potom nezávislé náhodné vektory s rovnomerným rozdelením na jednotkovom štvorci. Odhadnite strednú hodnotu vzdialenosti týchto bodov (A, B) a (C, D) .

Príklad 2 (20 bodov)

Uvažujme situáciu z predchádzajúcej úlohy: Rómeo a Júlia sa majú stretnúť o dvanástej. Obaja však notoricky meškajú, doba ich meškania má exponenciálne rozdelenie. Stredná hodnota meškania Rómea je 30 minút a Júlie 20 minút. Ich meškania sú nezávislé. Odhadnite pravdepodobnosť, že Rómeo príde na dohodnuté miesto skôr ako Júlia.

Príklad 3 (20 bodov)

Uvažujme nasledovnú situáciu:

Než se dočkají dva

Představme si, že dvě osoby (označme je A a B) nezávisle na sobě dělají současně nezávislé pokusy, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu rovna p tak jako dřív. Každá z osob čeká ve své sérii pokusů na první úspěch. Až se ho dočká, bude muset ještě posečkat na svého méně šťastného kolegu. Teprve ve chvíli, kdy i on dosáhne úspěchu, budou moci oba odejít domů. Jak dlouho na tuto chvíli budou muset čekat, jestliže oba své pokusy dělají současně? Řekněme, že v jednom kroku A i B udělají každý jeden pokus. Označme Z počet kroků potřebných k tomu, aby mohli konečně jít domů.

Odhadnite strednú hodnotu počtu krokov Z , ak pokus spočíva v hádzaní kockou a úspechom rozumieme hodenie šestky.

Nasledujúce príklady sú ako obrázky na stránke predmetu, pre úplnosť ich tu uvádzam kompletne.

Príklad 4 (20 bodov) – príklad zo súťaže Putnam Exam:

Two real numbers x and y are chosen at random in the interval $(0,1)$ with respect to the uniform distribution. What is the probability that the closest integer to x/y is even? Express the answer in the form $r + s\pi$, where r and s are rational numbers.

Bodovanie: 10 bodov za správny výpočet a numerickú hodnotu pravdepodobnosti, plný počet za hodnoty r, s (numerickým porovnaním svojho tipu pre r, s so získaným odhadom pravdepodobnosti, príp. presným výpočtom pravdepodobnosti).

Príklad 5 (20 bodov)

Pomocou simulácií odhadnite, aké známe rozdelenie (teda typ rozdelenia a jeho parameter, resp. parametre) má náhodná premenná X , ktorá vzniká nasledujúcim algoritmom, pričom Y sú nezávislé náhodné premenné s rovnomerným rozdelením na $(0, 1)$:

Select a random number Y_1 , then another one Y_2 , etc., continuing as long as the numbers so far chosen form a decreasing sequence, i.e.,

$$Y_1 > Y_2 > \dots > Y_n > Y_{n+1}$$

As soon as a random number is drawn that exceeds its immediate predecessor, the process halts.

If n is even, forget the entire sequence of random numbers, call this experiment a failure, and repeat from the beginning.

If, however, n is odd then we're ready for output. The number X that will be output is just this: the integer part of X is the number of failures so far seen, and the fractional part of X is Y_1 , the largest (and first) member of the last decreasing sequence chosen.

For example, if we choose random numbers .63, .19, .37 we would record a failure and start again. If the second sequence is .44, .91 then we are ready for output, and the number that is selected by these events is $X = 1.44$.

Príklad 6 (20 bodov)

V jednej domácej úlohe sa počítali pravdepodobnosti jednotlivých súčtov pri hádzaní kockami, ktoré majú na jednej strane číslo (prvá kocka jednotku, druhá dvojku, ..., šiesta šesťku). Tieto kocky sa používajú pri hre mang kung, ktorá má nasledovné pravidlá:

◆ DESCRIPTION OF THE GAME ◆

We first describe the game with three players. Each player contributes 7 units of stake into a "pool". Thus, the total initial amount in the pool is 21 units. A player is randomly selected to start the first game. Each time six *Mang Kung Dice* are thrown simultaneously. The total face value of these dice is counted. This total face value (F) is then compared with the total amount in the pool (P). The possible outcomes and the corresponding player's actions are listed in Table 1.



Table 1. The three possible situations in the Mang Kung Dice Game.

Outcomes	Player's Actions
$F < P$	The Player can take the amount F from the pool. He then passes the dice to the next player on his left to continue the game.
$F > P$	The Player has to top up the pool by the difference, $(F - P)$. He then passes the dice to the next player to continue the game.
$F = P$	The Player wins the game. He receives the amount P from the pool. Moreover, each of the other players has to pay him an amount F as "bonus". He is also the starter of the next new game.

Naprogramujte priebeh hry a odhadnite pravdepodobnosť výhry prvého, druhého a tretieho hráča. Uveďte aj počet simulácií a presné počty víťazstiev jednotlivých hráčov (využijeme neskôr).

(To znamená, že hráča, ktorý začína hru, nevolíme náhodne ani ho neurčí predchádzajúca hra ako v pravidlách. Potrebujeme, aby náš „hráč 1“ zodpovedal „hráčovi, ktorý začína hru“, čo dosiahneme najľahšie tak, že hru bude vždy začínať náš hráč 1, potom hádže hráč 2, hráč 3, znovu hráč 1 atď.)