

# Podmienená pravdepodobnosť

Beáta Stehlíková, FMFI UK v Bratislave

1-PMA-752 Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

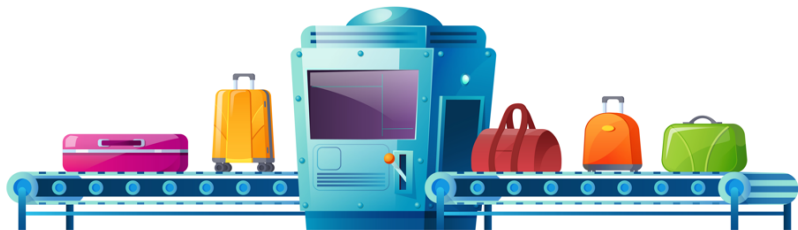
# Príklad 1: HAPPY HOUR

- ▶ Dvaja opití kamaráti vychádzajú z krčmy, ktorá má pri vchode nápis HAPPY HOUR.
- ▶ Jeden z nich náhodne odlepí dve písmená (s rovnakou pravdepodobnosťou pre každú dvojicu).
- ▶ Druhý ich prilepí naspäť, ale náhodne, nepozera sa, či ich vracia správne.
- ▶ Aká je pravdepodobnosť, že nápis HAPPY HOUR zostane zachovaný?



## Príklad 2: Stratená batožina

- ▶ Batožina je prepravovaná postupne troma leteckými spoločnosťami.
- ▶ Pravdepodobnosť, že prvá spoločnosť stratí batožinu (samozrejme za predpokladu, že k nej príde) je 0,1. Pre druhú spoločnosť je táto pravdepodobnosť 0,05 a pre tretiu 0,15.
- ▶ Batožina sa stratila. Aká je pravdepodobnosť, že ju stratila i-ta spoločnosť?



## Príklad 3: Zo súdnej siene (People vs. Collins)

- ▶ Starší človek v Los Angeles (1968) bol okradnutý, páchatelia boli opísaní ako čierny muž s bradou a fúzami a biela žena s blond vlasmi zopnutými v cope, ktorí odišli v žltom aute
- ▶ Neskôr zatkli dvojicu, ktorá vyhovovala tomuto popisu
- ▶ Prokurátor:
  - ▶ Majme tieto pravdepodobnosti:

|                           |         |
|---------------------------|---------|
| partly yellow automobile  | 1/10    |
| man with mustache         | 1/4     |
| girl with ponytail        | 1/10    |
| girl with blond hair      | 1/3     |
| black man with beard      | 1/10    |
| interracial couple in car | 1/1000. |

- ▶ Ak sú nezávislé, tak **pravdepodobnosť toho, že dvojica má tieto vlastnosti, je 1/12 000 000**, čo označil za *"matematický dôkaz ich viny"*
- ▶ Porota ich uznala vinnými.

- ▶ Odvolanie, Najvyšší súd Kalifornie
  - ▶ Uvedené pravdepodobnosti nemajú žiadny podklad.
  - ▶ Nebola zdôvodnený nezávislosť vlastností (a zrejme neplatí).
  - ▶ **Použitie pravdepodobnosti bolo nesprávne.**
- ▶ *Prijmime predpoklad, že je  $p = 1/12000000$  a 12 000 000 možných dvojíc (na základe populácie LA). Aká je pravdepodobnosť, že existuje ďalšia taká dvojica za podmienky, že aspoň jedna taká dvojica existuje (páchatelia)?*
- ▶ Ako to dopadlo:
  - ▶ Výpočet novej pravdepodobnosti + problémy s pôvodným výpočtom → zmenil pôvodný rozsudok súdu
  - ▶ Ale stalo sa to až po určitom čase vo väzení

*People v. Collins, 68 Cal. 2d 319 - Cal: Supreme Court 1968*

http:

[//scholar.google.com/scholar\\_case?case=2393563144534950884](http://scholar.google.com/scholar_case?case=2393563144534950884)

## Príklad 4: Putnam Exam I.

- ▶ **Putnam Exam** alebo **Putnam Competition** je matematická súťaž vysokoškolákov v USA a v Kanade.
- ▶ Vypočítame z nej dva príklady, v ktorých sa využije podmienená pravdepodobnosť.

### Príklad 1:

You have coins  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . For each  $k$ , coin  $C_k$  is biased so that, when tossed, it has probability  $\frac{1}{2^{k+1}}$  of falling heads. If the  $n$  coins are tossed, what is the probability that the number of heads is odd? Express the answer as a rational function of  $n$ .

---

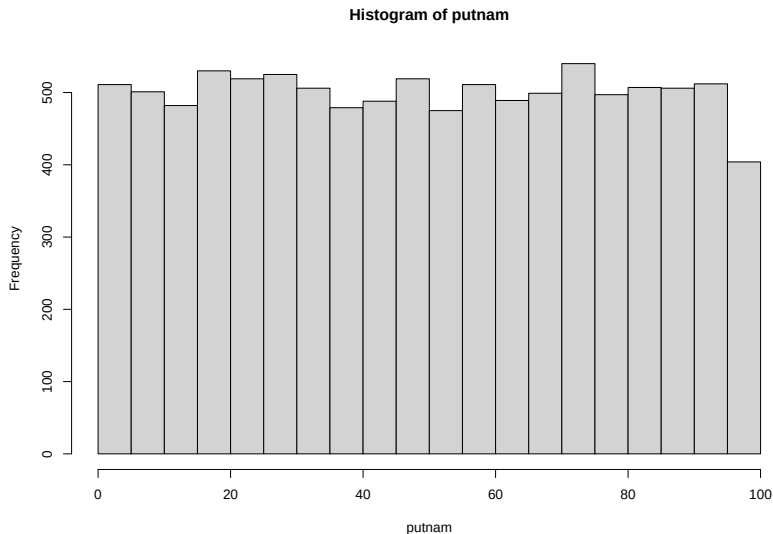
## Príklad 5: Putnam Exam II.

### Príklad 2:

Shanille O'Keal shoots free throws on a basketball court. She hits the first and misses the second, and thereafter the probability that she hits the next shot is equal to the proportion of shots she has hit so far. What is the probability she hits exactly 50 of her first 100 shots?

```
basketbal <- function(n){ # n = pocet pokusov
  vysledok <- rep(0, n)    # 0 = miss, 1 = hit
  vysledok[1] <- 1
  for (i in 3:n){
    p <- sum(vysledok)/(i-1)
    vysledok[i] <- sample(c(1, 0),
                          size = 1,
                          prob = c(p, 1 - p))
  }
  return(sum(vysledok))
}
```

```
set.seed(123) # kvoli reprodukovatelnosti  
putnam <- replicate(10^4, basketbal(100))  
hist(putnam) # histogram
```





## Príklad 6: Farba taxíka

- ▶ V meste sú dve taxislužby. Jedna má 85 zelených áut, druhá má 15 modrých áut.
- ▶ Počas hmlistého večera jazdili všetky taxíky. Jeden zrazil mladého muža. Ten neskôr vypovedal, že taxík bol modrý.
- ▶ Polícia vyskúšala, nakoľko je schopný rozoznať farbu v podobných podmienkach, ako boli v ten večer, a zistila, že farbu dokáže určiť správne v 75 percentách prípadov.
- ▶ Aká je pravdepodobnosť, že muž bol naozaj zrazený modrým taxíkom?

## Príklad 7: Náhodné podmnožiny

- ▶ Majme množinu s  $n$  prvkami.
- ▶ Náhodne vyberieme dve jej podmnožiny (nezávisle na sebe, s návratom, každá podmnožina má rovnakú pravdepodobnosť výberu) a označíme ich  $A, B$ .
- ▶ Aká je pravdepodobnosť, že  $A$  je podmnožinou  $B$ ?

**Pre kontrolu** prípady  $n = 2$  a  $n = 3$ :

|         |        | prvky B |     |   |     |
|---------|--------|---------|-----|---|-----|
|         |        | žiadne  | 1   | 2 | 1,2 |
| prvky A | žiadne | áno     | áno |   |     |
|         | 1      | nie     | áno |   |     |
|         |        |         |     |   |     |

|         |        | prvky B |     |     |     |
|---------|--------|---------|-----|-----|-----|
|         |        | žiadne  | 1   | 2   | 1,2 |
| prvky A | žiadne | áno     | áno | áno | áno |
|         | 1      | nie     | áno | nie | áno |
|         | 2      | nie     | nie | áno | áno |
|         | 1,2    | nie     | nie | nie | áno |

**Dva prístupy** (použijeme obidva a upravíme do tvaru bez sumy):

- ▶  $P(A \subseteq B) = \sum_{k=0}^n P(A \subseteq B | |A| = k) P(|A| = k)$
- ▶  $P(A \subseteq B) = \sum_{k=0}^n P(A \subseteq B | |B| = k) P(|B| = k)$

## Príklad 8: Hľadanie stratenej kozmickej lode

- ▶ Kozmická loď stratila spojenie so Zemou, môže sa nachádzať v sústave hviezdy A alebo hviezdy B, s pravdepodobnosťami 0,3 a 0,7.
- ▶ Vyhladávacie zariadenie ju môže hľadať počas jednej časovej periódy iba v jednej sústave.
- ▶ Ak je v sústave hviezdy A a hľadáme ju tam počas jednej časovej periódy, nájdeme ju s pravdepodobnosťou 0,4. V prípade hviezdy B je táto pravdepodobnosť 0,25.



## Otázky:

- ▶ V ktorej sústave máme hľadať kozmickú loď, aby sme maximalizovali pravdepodobnosť, že ju nájdeme v prvej perióde?
- ▶ Automat vo vyhľadávacom zariadení hodil mincou, aby určil sústavu, do ktorej pôjde loď hľadať. Na konci prvej periódy hlási, že posádku našiel. Aká je pravdepodobnosť, že hlásenie prišlo zo sústavy hviezdy A?
- ▶ Hľadanie sme začali v sústave A, ale kozmickú loď sme nenašli. Aká je pravdepodobnosť, že napriek tomu je práve v tejto sústave?

Zdroj obrázkov:

[https://www.freepik.com/free-vector/  
cartoon-happy-hours-instagram-post\\_22898251.htm](https://www.freepik.com/free-vector/cartoon-happy-hours-instagram-post_22898251.htm)

[https://www.freepik.com/free-vector/  
conveyor-belt-with-luggage-airport-terminal-security-check-scanner-baggage  
13429021.htm](https://www.freepik.com/free-vector/conveyor-belt-with-luggage-airport-terminal-security-check-scanner-baggage_13429021.htm)

[https://www.freepik.com/free-vector/  
outer-space-explorers-travelers-cartoon-illustration-with-female-male-astron  
3586143.htm](https://www.freepik.com/free-vector/outer-space-explorers-travelers-cartoon-illustration-with-female-male-astronauts_3586143.htm)