

Simulácie príkladov

Beáta Stehlíková, FMFI UK v Bratislave

1-PMA-752 Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Opakovanie

Opakovanie

Čo dostaneme v nasledujúcich prípadoch (najskôr bez toho, aby sme ich v R-ku spustili)?

```
sample(c("A", "B", "C"), size = 2, replace = TRUE)
```

```
sample(1:5, size = 10, replace = FALSE)
```

```
length(c(1, 3, 4, 3, 1, 1))
```

```
unique(c(1, 3, 4, 3, 1, 1))
```

```
length(unique(c(1, 3, 4, 3, 1, 1)))
```

Oplatí sa používať `set.seed` kvôli reprodukovateľnosti.

Simulácie kombinatorických zadaní

Príklad 1. V domácej úlohe 2 sme potrebovali pravdepodobnosť toho, že pri výbere dvoch písmen zo slova ANAKONDA vyberieme rovnaké písmená. Vytvorte funkciu, ktorá simuluje túto situáciu a vracia hodnotu TRUE/FALSE. Funkciou `replicate` simuláciu opakujte a spravte tabuľku s výsledkami.

Príklad 2. Domáca úloha 1, príklad 2(b). Simulačne odhadneme pravdepodobnosť nulového počtu bodov.

Príklad 3. Cvičenie 1, príklad 5 (oslavy narodenín). Simulačne odhadneme očakávaný počet odpracovaných človekodní pri konkrétnom zvolenom počte zamestnancov.

Príklad 4. Cvičenie 2, príklad 4 (Putnam Exam, mince). Simulačne odhadneme pravdepodobnosť pre zvolený počet mincí.

Príklad 5. Hádzeme N kockami a všímame si, koľko rôznych čísel na nich padlo. Pre zvolený počet kociek odhadneme simulačne strednú hodnotu tohto počtu rôznych čísel.

Príklad 6. Hádzeme troma kockami. Získavame toľko bodov, koľko šestiek padlo. Simulačne odhadneme strednú hodnotu počtu získaných bodov.

Simulovanie spojitých náhodných premenných

Rovnomerné rozdelenie

- rovnomerné rozdelenie na intervale $(0, 1)$, resp. (a, b)

```
runif(1) # r = random, unif = uniform
```

```
## [1] 0.8587649
```

```
runif(3)
```

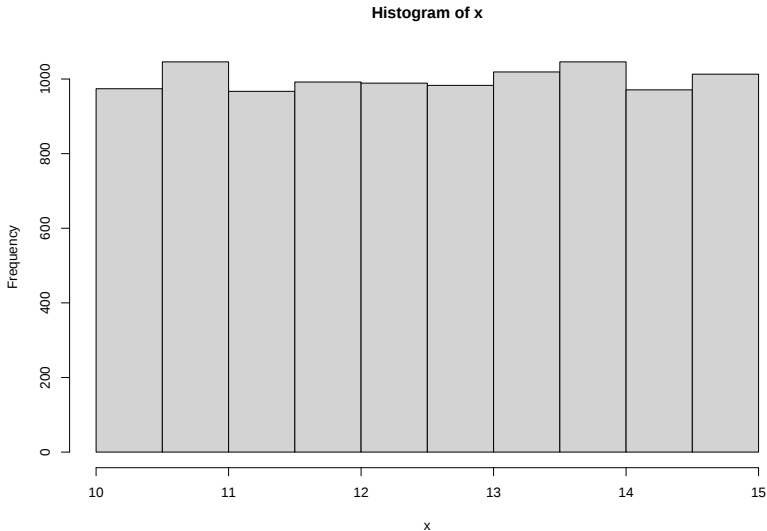
```
## [1] 0.3599247 0.5162873 0.9264263
```

```
runif(3, min = 2, max = 10)
```

```
## [1] 3.986420 6.670257 2.370638
```

Histogram vygenerovaných hodnôt:

```
x <- runif(10^4, min = 10 , max = 15)  
hist(x)
```



Príklad 7. Cvičenie 3, príklad 6 (nastavenie výšky spoluúčasti). Pri zvolenú spolúčasť odhadneme strednú hodnotu platby poisťovne.

Príklad 8. Riešte simulačne: Vek poistencov sa udáva zaokrúhlený na 5 rokov. Vieme, že rozdiely medzi presným a zaokrúhleným vekom majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(-2.5, 2.5)$ a pre jednotlivých poistencov sú nezávislé. Zo 48 náhodne vybraných údajov sa vypočíta priemerný vek. Aká je pravdepodobnosť, že sa od skutočného priemerného veku týchto poistencov líši menej ako o štvrt' roka?

Možnosti: (A) 0.14 (B) 0.38 (C) 0.57 (D) 0.77 (E) 0.88

Príklad 9. Riešte simulačne: Rodina kúpila poistky na dve udalosti. Prvá má spoluúčasť 1 a druhá 2. Škody pri oboch udalostiach majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(0, 10)$ a sú nezávislé. V oboch prípadoch nastala práve jedna poistná udalosť. Aká je pravdepodobnosť, že platba, ktorú rodina dostala, je menšia ako 5?

Možnosti: (A) 0.13 (B) 0.25 (C) 0.30 (D) 0.32 (E) 0.42

Normálne rozdelenie

- normálne rozdelenie $N(0,1)$, resp. $N(\mu, \sigma)$

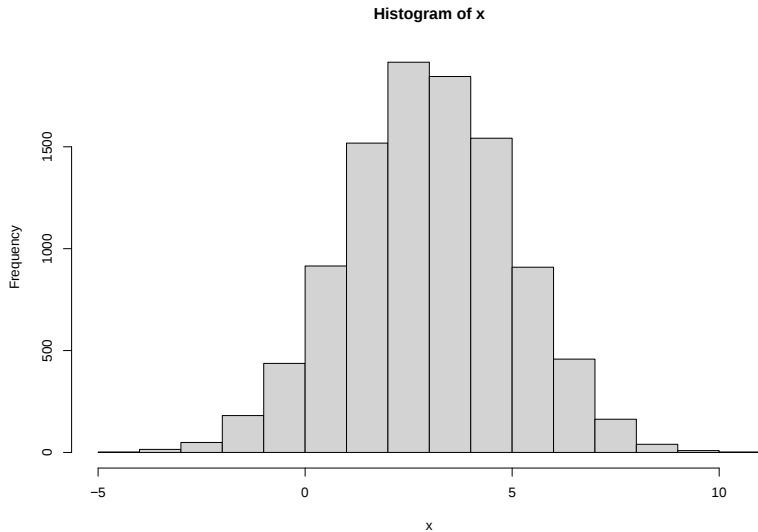
```
rnorm(1) # r = random, norm = normal
```

```
## [1] 0.02442486
```

```
rnorm(2, mean = 3, sd = 2) # sd = standard deviation
```

```
## [1] 1.594441 3.316199
```

```
x <- rnorm(10^4, mean = 3, sd = 2)
hist(x)
```



Príklad 10. Z knihy *Quant Jov Interview Questions and Answers*, kde sú otázky z pracovných pohovorov na Wall Street a City of London.

Nech X je náhodná premenná s normálnym rozdelením $N(0, 1)$ a F je distribučná funkcia tohto rozdelenia. Aké rozdelenie má náhodná premenná $F(X)$? (Dosadzujeme teda hodnoty náhodnej premennej do jej distribučnej funkcie.)

Vyriešime aj simulačne, výsledok aj dokážeme.

```
# p = distribucna funkcia, norm = normalne rozdelenie  
pnorm(0, mean = 0, sd = 1)
```

```
## [1] 0.5
```

```
pnorm(0) # to iste
```

```
## [1] 0.5
```

Metóda inverznej transformácie

Obrátené tvrdenie:

- ▶ Ak budeme dosadzovať náhodné čísla z rovnomerného rozdelenia na $(0, 1)$ do inverznej funkcie k distribučnej, dostaneme náhodné čísla z rozdelenia s danou distribučnou funkciou.

Zovšeobecníme aj pre nespojitú distribučnú funkciu aj pre distribučnú funkciu konštantnú na nejakom intervale.

Príklady 11-12. Cvičenie 3, príklady 1 a 2. Navrhните postup pre simulovanie náhodných premenných z týchto príkladov. Zobrazte histogram získaných hodnôt (mal by sa podobáť na hustotu). Simulačne odhadnite pravdepodobnosti, ktoré sme počítali.

Príklady 13-16. Cvičenie 3, príklady 3, 4, 5, 7 - riešte tieto príklady simulačne.