

# Spojité náhodné vektory

Metódy riešenia úloh  
z pravdepodobnosti a štatistiky



# Príklad 1: Doba fungovania prístroja I.

- Z príkladov zo skúšok *Society of Actuaries*
- Fungovanie prístroja:
  - Skladá sa z dvoch častí
  - Ak sa niektorá z nich pokazí, prístroj prestane fungovať
  - Doba životnosti (v hodinách) týchto dvoch častí je náhodný vektor  $(S, T)$  s hustotou  $f(s, t)$  pre  $0 < s < 1, 0 < t < 1$



# Príklad 1: Doba fungovania prístroja I.

- Aká je pravdepodobnosť, že prístroj prestane fungovať počas prvej polhodiny?

$$(A) \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$

$$(B) \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$

$$(C) \int_{0.5}^1 \int_{0.5}^1 f(s, t) ds dt$$

$$(D) \int_0^{0.5} \int_0^1 f(s, t) ds dt + \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$

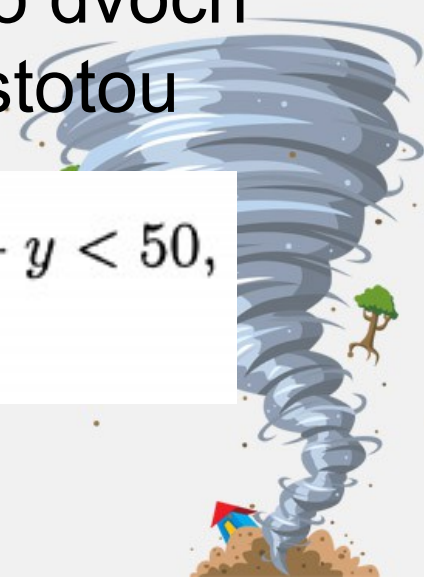
$$(E) \int_0^{0.5} \int_{0.5}^1 f(s, t) ds dt + \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$



# Príklad 2: Doba fungovania prístroja II.

- Fungovanie prístroja:
  - Skladá sa z dvoch častí
  - Ak sa niektorá z nich pokazí, prístroj prestane fungovať
  - Doba životnosti (v mesiacoch) týchto dvoch častí je náhodný vektor  $(X, Y)$  s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{125,000} (50 - x - y) & \text{pre } 0 < x < 50 - y < 50, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$



# Príklad 2: Doba fungovania prístroja II.

- Aká je pravdepodobnosť, že po 20 mesiacoch prístroj ešte funguje?

$$(A) \frac{6}{125,000} \int_0^{20} \int_0^{20} (50 - x - y) dy dx$$

$$(B) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{30} \int_{20}^{50-x} (50 - x - y) dy dx$$

$$(C) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{30} \int_{20}^{50-x-y} (50 - x - y) dy dx$$

$$(D) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{50} \int_{20}^{50-x} (50 - x - y) dy dx$$

$$(E) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{50} \int_{20}^{50-x-y} (50 - x - y) dy dx$$



# Príklad 3: Najväčšia škoda

- Škody na domoch spôsobené vetrom sú nezávislé náhodné premenné s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{pre } x > 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

kde  $x$  je škoda v tisícoch.

- Hlásené boli 3 poškodené domy.
- Aká je stredná hodnota najvyššej škody?

(A) 2025 (B) 2700 (C) 3232 (D) 3375 (E) 4500



# Príklad 4: Spoluúčasť

- Poistenie:
  - Združené rozdelenie vektora škôd  $(X, Y)$ :

$$f(x, y) = 2x \quad \text{pre } 0 < x < 1 \text{ a } 0 < y < 1$$

- Spoluúčasť: 1
- Vypočítajte strednú hodnotu sumy vyplatenej poisťovňou.

(A)  $1/4$  (B)  $1/3$  (C)  $1/2$  (D)  $7/12$  (E)  $5/6$



# Príklad 5: Tornádo

- Poistovňa analyzuje škody spôsobené tornádom:
  - $X$  je časť poistného plnenia zodpovedajúca škodám na dome
  - $Y$  je časť poistného plnenia zodpovedajúca škodám na ostatnom majetku
  - môžu byť ešte ďalšie časti plnenia
  - teda  $X, Y$  sú z intervalu  $[0, 1]$  a platí  $X + Y < 1$



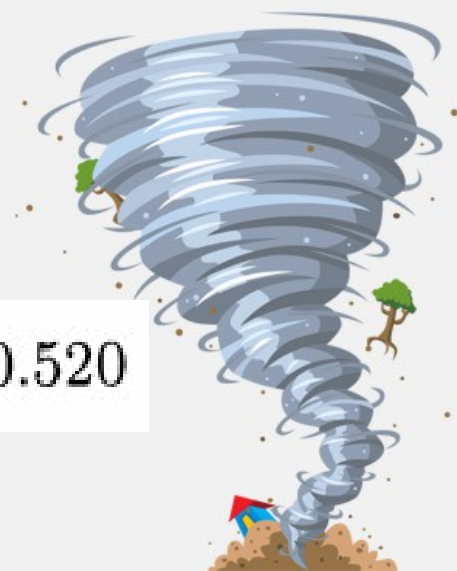
# Príklad 5: Tornádo

- Združená hustota  $(X, Y)$  je

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1 - (x + y)) & \text{pre } x > 0, y > 0, x + y < 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Aká je pravdepodobnosť, že časť zodpovedajúca škodám na dome bude tvoriť menej ako 20 percent poistného plnenia?

(A) 0.360 (B) 0.480 (C) 0.488 (D) 0.512 (E) 0.520



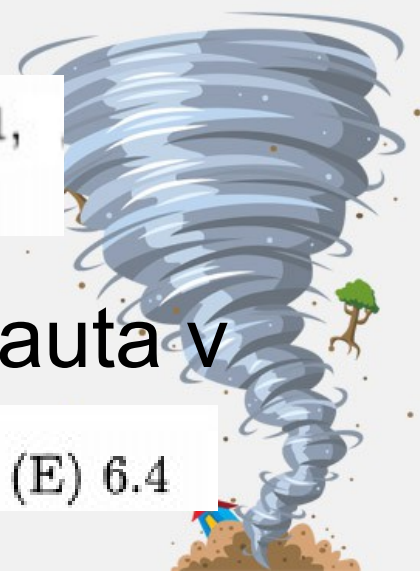
# Príklad 6: Automobily

- Poistenie automobilov, z dát o dopravných nehodách vieme:
  - Vek automobilu  $X$
  - Čas nehody od zaplattenia ročného poistenia  $Y$
  - Združené rozdelenie vektora  $(X, Y)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{64}(10 - xy^2) & \text{pre } 2 \leq x \leq 10 \text{ a } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Vypočítajte strednú hodnotu veku auta v nehode.

(A) 4.9    (B) 5.2    (C) 5.8    (D) 6.0    (E) 6.4



# Príklad 7: Požiare

- Po nahlásení požiaru poisťovňa:
  - Spraví predbežný odhad poistného plnenia  $X$
  - Označme skutočne vyplatenú sumu  $Y$
  - Združené rozdelenie vektora  $(X, Y)$ :

$$f(x, y) = \frac{2}{x^2(x-1)} y^{-(2x-1)/(x-1)}, \quad x > 1, y > 1.$$

- Za predpokladu, že predbežný odhad je 2, vypočítajte pravdepodobnosť, že vyplatená suma bude medzi 1 a 3.

(A) 1/9   (B) 2/9   (C) 1/3   (D) 2/3   (E) 8/9

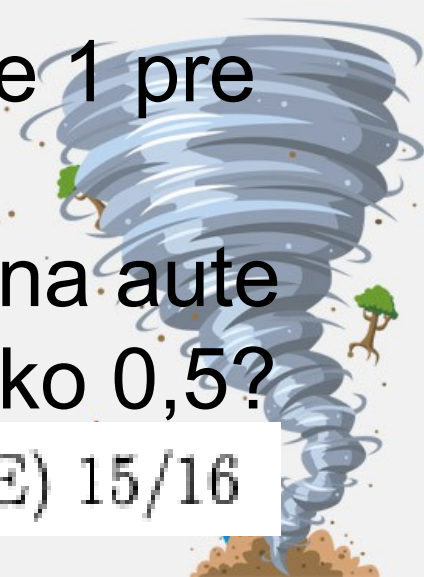


# Príklad 8: Dopravná nehoda

- Ak poistenec spôsobí nehodu, poisťovňa zaplatí škodu na jeho aute (výška škody je náhodná premenná  $X$ ) aj na aute druhého účastníka nehody (náh. prem.  $Y$ )
- $X$  má marginálnu hustotu 1 pre  $0 < x < 1$
- Ak  $X = x$ , podmienená hustota  $Y$  je 1 pre  $x < y < x+1$

Aká je pravdepodobnosť, že škoda na aute druhého účastníka nehody je viac ako 0,5?

(A)  $3/8$  (B)  $1/2$  (C)  $3/4$  (D)  $7/8$  (E)  $15/16$



# Príklad 9: Čas spracovania

- Výška poistného plnenia  $X$  má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{for } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Pre dané  $X=x$  má čas spracovania v hodinách rovnomerné rozdelenie na intervale  $(x, 2x)$
- Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybrané spracovanie bude trvať 3 hodiny alebo viac?



(A) 0.17 (B) 0.25 (C) 0.32 (D) 0.58 (E) 0.83

# Príklad 10: Poistenie pre manželov

Poist'ovňa ponúka manželom dva produkty:

- Prvý vyplatí poistnú sumu po tom, čo zomrie manžel
- Druhý vyplatí poistnú sumu po tom, čo zomrú obaja manželia.

Zostávajúcu dĺžku života manžela a manželky modeluje poist'ovňa ako nezávislé náhodné premenné s rovnomerným rozdelením na intervale  $(0, 40)$ .



# Príklad 10: Poistenie pre manželov

Vypočítajte kovarianciu medzi časmi, v ktorých tieto dva produkty vyplácajú poistnú sumu.

(A) 0.0   (B) 44.4   (C) 66.7   (D) 200.0   (E) 466.7

